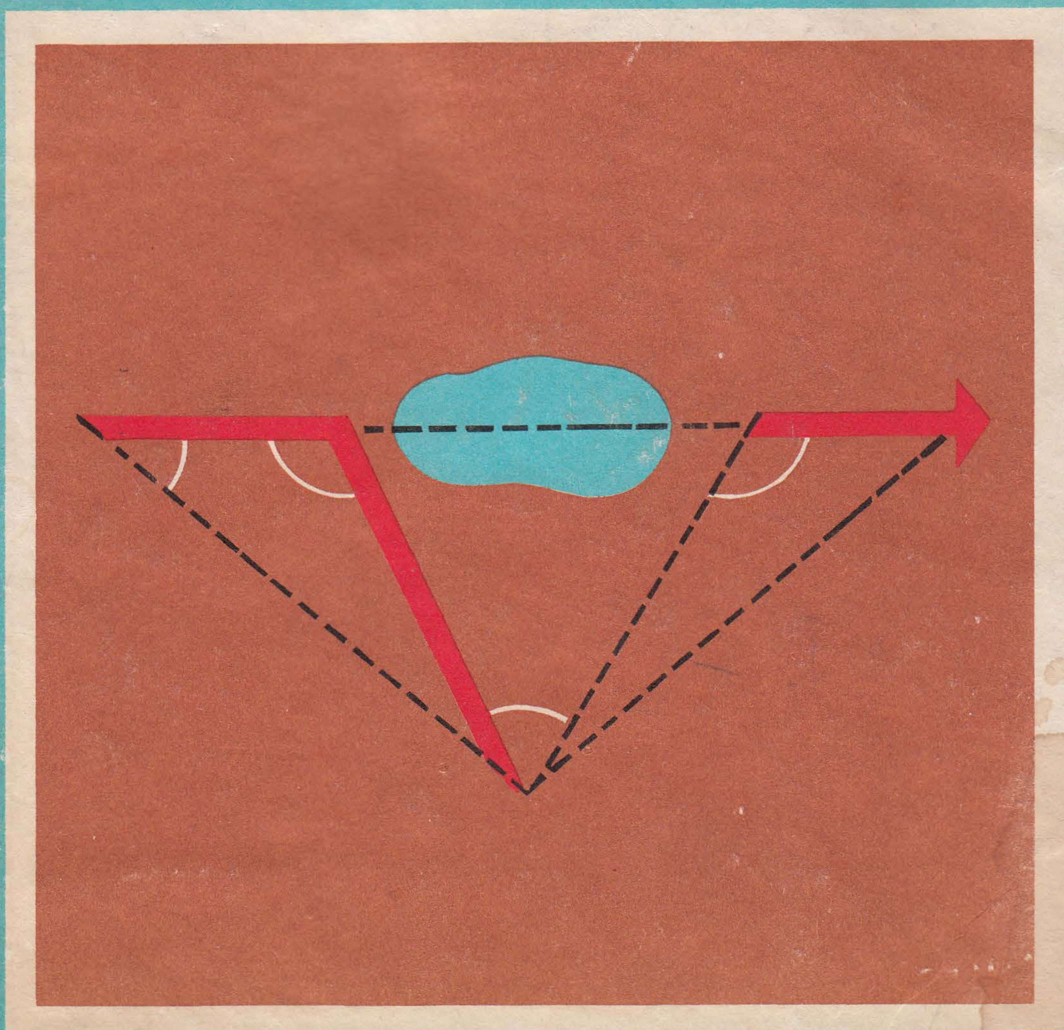
Marius Stoka Mircea Raianu Eugen Mărgăritescu

Culegere de probleme de trigonometrie

pentru licee



Prefață

Prezenta culegere constituie un auxiliar în predarea trigonometriei în licee și a fost elaborată în conformitate cu noua programă analitică, împărțirea pe capitole corespunzînd, în general, manualului de trigonometrie în vigoare. Completînd manualul, culegerea va contribui atît la formarea deprinderilor de calcul a elevilor cît și la aprofundarea părții teoretice. S-a urmărit ca rezolvarea problemelor, implicată de condițiile impuse, să fie concisă și completă. În scrierea soluțiilor s-au folosit elemente de teoria mulțimilor.

Evident, unele soluții propuse în rezolvarea problemelor nu sînt singurele și poate nici cele mai simple. Recomandăm cititorilor să încerce a mai găsi și altele.

Menționăm că pentru a prezenta unitar capitolul II — Funcții trigonometrice, în rezolvarea unor probleme s-au folosit unele relații pe care cititorii le găsesc în formularul ce precede capitolul III — Formule fundamentale.

Pentru problemele propuse la diferite concursuri nu s-a mai făcut specificația respectivă, pentru ca elevii să acorde o egală importanță tuturor problemelor.

La realizarea lucrării s-au consultat culegeri, manuale și reviste de matematică realizate mai ales în țara noastră, încercîndu-se ca în prezentarea materialului să se adopte unele elemente de modernizare a predării matematicii în licee.

Autorii

Capitolul **1**

Unități de măsură a unghiurilor și arcelor. Relații între ele

1. *Unghiul drept* este unghiul egal cu suplementul lui. Se notează cu 1 dr. De exemplu: $\hat{A} = 1{,}75$ dr.

2. *Gradul sexagezimal* (gradul vechi) reprezintă un unghi egal cu a 90-a parte dintr-un unghi drept. Gradul (1°) este împărțit în 60′ (minute) și fiecare minut în 60″ (secunde). Ca subdiviziuni ale secundei se iau fracții zecimale de secundă sau zecimi de secundă (întrebuințate în calcule de mare precizie).

Avem: $$1^\circ = 60' = 3\,600'',$$ $$1 \text{ dr} = 90^\circ = 5\,400' = 324\,000''.$$

Exemplu. $\hat{A} = 67^\circ 15' 37{,}2''$.

3. *Gradul centezimal* (gradul nou) reprezintă un unghi egal cu a 100-a parte din unghiul drept. Gradul (1^g) este împărțit în 100^c (minute centezimale) și fiecare minut în 100^{cc} (secunde centezimale). Minutele și secundele centezimale se mai notează uneori și astfel: 100′ și 100″. Cînd se urmărește o precizie mai mare se iau și fracții zecimale de secundă.

Avem: $$1^g = 100^c = 10\,000^{cc},$$ $$1 \text{ dr} = 100^g = 10\,000^c = 1\,000\,000^{cc}.$$

Exemplu. $\hat{A} = 93^g 73^c 03{,}7^{cc}$.

Observație. Calculele cu grade centezimale sînt mai ușoare și în plus oferă o precizie mai mare, fiind mai mici decît unitățile respective sexagezimale ($1'' \approx 3^{cc}$).

4. *Radianul.* Dacă se ia raza cercului ca unitate de măsură a arcelor, atunci arcul cu o lungime egală cu raza cercului respectiv se numește arc de un radian (1 rad), iar unghiul la centru respectiv, unghi de un radian.

Avem: $$L = 2\pi R = 2\pi \text{ rad} = 203{,}14159 \text{ rad} = 6{,}28318 \text{ rad}$$ $$4 \text{ dr} = 360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad} = 6{,}28318 \text{ rad}.$$

Corespondența dintre cîteva unghiuri uzuale în grade sexagezimale și radiani:

n°	0°	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
n_ρ	0_ρ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Relații de transformare:

$$2 \text{ dr} = 180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$$

Exerciții și probleme rezolvate

1. *Să se transforme* $\alpha = 37^\circ 23' 57''$ *în unghiuri drepte.*

Soluție.

90° 1dr
37°23′57″ x

$$x = \frac{37^\circ 23' 57''}{90^\circ} = \frac{134\ 637''}{324\ 000''} = 0{,}41505 \text{ dr},$$

deci: $37^\circ 23' 57'' = 0{,}41505$ dr.

2. *Să se transforme* $\alpha = 37^\circ 23' 57''$ *în grade centezimale.*

Soluție.

90° .... 100^g
37°23′57″ x

$$x = \frac{37^\circ 23' 57'' \cdot 100^g}{90^\circ} = \frac{134\ 637'' \cdot 1\ 000\ 000^{cc}}{324\ 000''},$$

$$x = 415\ 546{,}3^{cc} = 41^g\ 55^c\ 46{,}3^{cc},$$

deci:

$$37^\circ 23' 57'' = 41^g\ 55^c 46{,}3^{cc}.$$

3. *Să se transforme* $\alpha = 37^\circ 23' 57''$ *în radiani.*

Soluție.

180° .... 3,14159 rad
37°23′57″ x

$$x = \frac{37^\circ 23' 57'' \cdot 3{,}14159 \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{134\ 637'' \cdot 3{,}14159 \text{ rad}}{648\ 000''},$$

$$x = \frac{422\ 974{,}25283}{648\ 000} = 0{,}65273 \text{ rad},$$

deci:

$$37^\circ 23' 57'' = 0{,}65273 \text{ rad}.$$

4. *Să se calculeze în radiani lungimea arcului de* $10''$.

Soluție.

180° 3,1416
10″ x

$$x = \frac{10 \cdot 3{,}1416}{648\ 000} = 0{,}000048481 \text{ rad}.$$

5. *Să se exprime în grade sexagezimale unghiul* $\frac{3\pi}{16}$, *complementul lui* $\frac{7\pi}{8}$ *și suplementul lui* $\frac{13\pi}{30}$.

Soluție. a) $\frac{3\pi}{16} = \frac{3 \cdot 180°}{16} = 33°45'$.

b) $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} = -67°30'$, c) $\pi - \frac{13\pi}{30} = \frac{17\pi}{30} = 102°$.

6. *Axul unui strung face 2 000 de rotații pe minut. Să se exprime în grade centezimale unghiul parcurs de ax în 5 miimi de secundă de timp.*

Soluție. Axul face într-un minut de timp 2 000 · 400 grade centezimale, iar într-o secundă de timp: $\frac{2\,000 \cdot 400^g}{60}$.

Rezultă că în 5 miimi de secundă de timp unghiul parcurs este:

$$\frac{2\,000 \cdot 400^g}{60} \cdot 0{,}005 = 66^g6666.$$

7. *Care este lungimea unui arc de 80°40′25″, de pe un cerc de rază R = 5 m?*

Soluție. Știm că: $l = ar$, în care:

l este lungimea arcului de cerc;
a — măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător;
r — lungimea razei cercului respectiv.
Transformăm deci 80°40′25″ în radiani:

180° 3,1416
80°40′25″ x

$$x = \frac{290\,425'' \cdot 3{,}1416 \text{ rad}}{648\,000''} = 1{,}408 \text{ rad}.$$

Rezultă că: $l = ar = 1{,}408 \cdot 5 = 7{,}040$ m.

8. *Într-un cerc cu raza R = 8 cm se dă un arc egal cu 6,396 cm. Să se determine în radiani și în grade sexagezimale mărimea unghiului la centru corespunzător.*

Soluție. a) Numărul radianilor $= \frac{\text{lungimea arcului}}{\text{lungimea razei}}$, deci:

$$n_{rad} = \frac{6{,}396}{8} = 0{,}7995 \text{ rad}.$$

b) 3,14159 .... 180°
0,7995 x

$$x = \frac{0{,}7995 \cdot 180°}{3{,}14159} = 45°48'32''.$$

9. *Să se exprime în radiani, grade sexagezimale și centezimale unghiul format de acele unui ceas la ora 3 și jumătate.*

Soluție. Calculăm, mai întîi, arcul de cerc exprimat în radiani parcurs de acul mare (acul care arată orele) în 3 ore și 30 minute:

12 .... 2π
3h30m x

$$x = \frac{2\pi \cdot 3^h30^m}{12 \cdot 60} = \frac{2\pi \cdot 210}{12 \cdot 60} = \frac{7\pi}{12}.$$

Unghiul α, exprimat în radiani, format de acele ceasului la 3h30m este deci:

$$\alpha = \pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}.$$

Rezultă: $\alpha = \frac{5\pi}{12}$ rad $= 75° = 83^g3333$.

10. *Unghiul format de tangentele în două puncte ale unui cerc cu raza de 720 m este de 135°; să se afle lungimea arcului dintre cele două puncte* (arc $AB < 180°$).

Soluție (v. fig. I,1).

1. $OA \perp AC$
2. $OB \perp BC$
3. $\widehat{BCA} = 135°$
4. $OA = OB = R = 720$ m
5. $l_{arc\ AB} = ?$

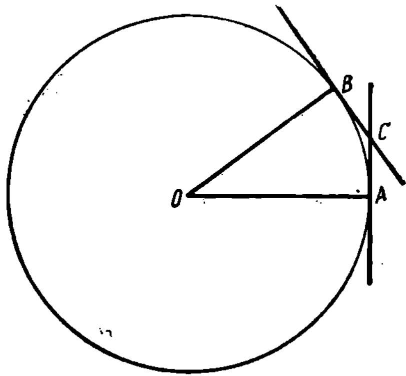


Fig. I, 1.

Patrulaterul $OACB$ fiind inscriptibil, avem:

$\widehat{AOB} = 180° - 135° = 45°$.

Aplicăm relația:

$l = ar$ (v. aplicația 7), $a = \frac{\pi}{4} = \frac{3,1416}{4} = 0,7854$ rad;

deci: $l = 0,7854 \cdot 720 = 565,48$ m.

11. *Suma lungimilor a două cercuri este de* 89,46 m. *Suma arcelor care corespund la două unghiuri la centru egale în cele două cercuri este de* 12,35 m. *Să se afle unghiul la centru în grade sexagezimale și în radiani.*

Soluție. a) Notăm cu R_1 și R_2 razele celor două cercuri și cu $n°$ mărimea unghiului la centru.

Avem: $2\pi R_1 + 2\pi R_2 = 89,46$ (1)

și: $\frac{\pi R_1 n°}{180°} + \frac{\pi R_2 n°}{180°} = 12,35.$ (2)

Din (1) obținem $R_1 + R_2 = \frac{89,46}{2\pi}$, sumă pe care o înlocuim în relația (2) scrisă sub forma:

$$\frac{\pi n°}{180°}(R_1 + R_2) = 12,35$$

deci:

$$\frac{\pi n°}{180°} \cdot \frac{89,46}{2\pi} = 12,35, \text{ de unde:}$$

$$n° = \frac{12,35 \cdot 180°}{44,73} = \frac{2\ 223}{44,73} = \frac{741}{14,91} = 49°42'.$$

b) 180° 3,14

49°42' x

$$x = \frac{2\ 982 \cdot 3,14}{10\ 800} = 0,86 \text{ rad.}$$

12. *Două mobile* A *și* B *pleacă în același moment, deplasîndu-se în același sens, din două puncte diametral opuse situate pe același cerc. Mobilul* A *descrie în fiecare minut un arc de* 30°, *iar mobilul* B *un arc de* 45°.

După cît timp de la începutul mișcării se produce prima, a patra și a n-a întîlnire a mobilelor?

Soluție. Deoarece cele două mobile se deplasează pe un cerc cu viteze constante, putem aplica relația:

$$\alpha = \omega t,$$

care reprezintă legea spațiului în mișcarea circulară și uniformă și în care $\omega = \frac{2\pi}{T}$ este viteza unghiulară.

Notăm cu t_1 timpul după care se produce prima întîlnire.

Avem:

$$\alpha_1 = \omega_1 t_1,$$
$$\alpha_2 = \omega_2 t_1$$
$$\alpha_1 - \alpha_2 = (\omega_1 - \omega_2) t_1$$
$$t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \omega_2}.$$

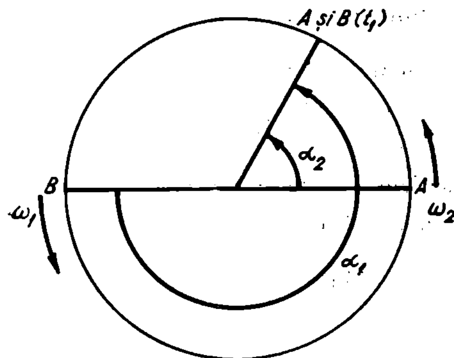


Fig. I,2.

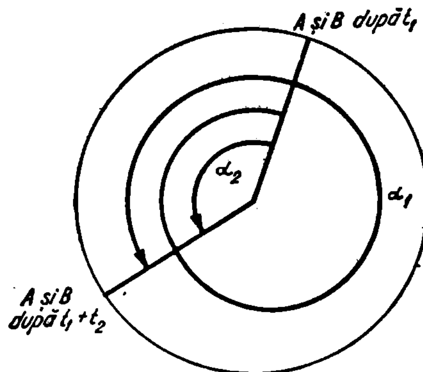


Fig. I,3.

Dar $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$ (fig. I,2), deci: $t_1 = \dfrac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}$.

Deoarece: $\omega_1 = \dfrac{\pi}{4}$ rad/min şi $\omega_2 = \dfrac{\pi}{6}$ rad/min $\left(\text{se vede uşor, fie direct, fie aplicînd relaţia } \omega = \dfrac{2\pi}{T}\right)$,

obţinem: $t_1 = \dfrac{\pi}{\frac{\pi}{12}}$, de unde $t_1 = 12$ min.

Altă soluţie. Presupunînd că mobilul A stă pe loc, mobilul B are de parcurs spaţiul π cu o viteză egală cu diferenţa vitezelor celor două mobile:

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}, \text{ iar } t = \frac{\pi}{\frac{\pi}{12}} = 12 \text{ min.}$$

Ne propunem, în continuare, să găsim mai întîi după cît timp de la începutul mişcării se produce a n-a întîlnire.

1 .... $t_1 = 12$ (prima întîlnire)
2 .... $t_1 + t_2$ (a doua întîlnire)
3 .... $t_1 + 2t_2$ (a treia întîlnire)
⋮
n .... $t_1 + (n-1)t_2$ (a n-a întîlnire).

$$t_n = t_1 + (n-1)t_2.$$

Dar: $t_2 = \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \omega_2} = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$ min (fig. I,3),

deci: $t_n = 12\,(2n - 1)$ min.

Pentru a găsi timpul după care se produce a patra întîlnire, înlocuim pe n cu 4. Rezultă $t_4 = 12(2 \cdot 4 - 1) = 12 \cdot 7 = 84$ min.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Să se calculeze în radiani următoarele arce: 1°; 1′; 5′; 54°; 30″; 14°12′32″.

2. Să se calculeze în grade sexagezimale şi centezimale arcele următoare: $\dfrac{2\pi}{13}$; $\dfrac{5\pi}{12}$; $\dfrac{7\pi}{5}$.

3. Să se transforme $\alpha = 1$ rad. în grade sexagezimale.
4. Să se transforme $\alpha = 1''$ în radiani.
5. Să se transforme $\alpha = 83^g96^c63^{cc}$ în grade sexagezimale şi în radiani.
6. Să se exprime în grade, minute şi secunde sexagezimale unghiul de 145^g5674.
7. Să se transforme $\alpha = 135°42'57''$ în grade centezimale şi în radiani.
8. Să se exprime în radiani unghiul de $18°15'17,5''$.
9. Să se transforme $\alpha = 0,73895$ rad. în grade sexagezimale şi centezimale.
10. Să se exprime în grade, minute şi secunde sexagezimale unghiul de $\frac{5\pi}{7}$.
11. Să se calculeze în grade sexagezimale complementele următoarelor arce: $\frac{5\pi}{8}$ şi $\frac{4\pi}{15}$.
12. Să se calculeze în grade sexagezimale suplementele următoarelor arce: $\frac{7\pi}{20}$; $\frac{16\pi}{11}$; $\frac{15\pi}{37}$.
13. Două din unghiurile unui triunghi sînt de 15° şi 80°. Să se exprime în radiani al treilea unghi al triunghiului.
14. Să se calculeze în radiani şi grade centezimale unghiul decagonului regulat convex.
15. Să se afle raportul arcelor $56°12'18''$ şi 37^g47^c.
16. Să se afle două arce în grade sexagezimale, ştiind că suma lor în grade centezimale este 78^g, iar diferenţa lor în radiani este de 0,4.
17. Să se afle două arce a căror diferenţă este $\frac{\pi}{8}$, iar suma: 51°; $20°52'30''$.
18. Unul din unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic este de 1,15 radiani. Să se calculeze cîţi radiani are celălalt unghi ascuţit.
19. Să se afle lungimea arcului de cerc cu raza de 3,2 m, ştiind că arcul este egal cu 117°.
20. Lungimea arcului de cerc a cărui rază este egală cu 2,4 m are 3 m. Să se exprime în grade sexagezimale acest arc.
21. Să se calculeze, în radiani şi în grade sexagezimale, unghiul la centru ce corespunde arcului de 9,6 dm, în cercul de rază $R = 20,5$ dm.
22. Să se calculeze lungimile arcelor de cerc ce corespund următoarelor unghiuri la centru:

$\hat{A} = 35°$ în cercul de rază $R = 5$ cm;

$\hat{B} = 50°15'$ în cercul de rază $R = 4,5$ dm;

$\hat{C} = 3°09'12''$ în cercul de rază $R = 9$ m.

23. Care este lungimea unui arc de 152^g175^c de pe un cerc de rază $R = 2$ m?
24. Se ştie că în acelaşi cerc de rază $R = 3$ m, un arc este de $340°20'40''$, iar altul de 152^g40^c. Să se calculeze lungimea diferenţei acestor arce.
25. Ştiind că aria unui cerc este de 123,45 cm², să se calculeze lungimea arcului corespunzător unghiului la centru de $15°20'$.
26. Lungimile a două cercuri sînt, respectiv, 66,50 cm şi 30,15 cm. Raportul a două unghiuri la centru în aceste cercuri este 3/4, iar suma arcelor corespunzătoare 19,51 cm. Să se găsească unghiurile la centru.
27. În cercul cu raza de 2,5 cm un arc corespunde unui unghi la centru de 1,5 radiani. Să se calculeze, în grade sexagezimale şi în radiani, unghiul la centru ce corespunde aceluiaşi arc în cercul cu raza de 1 cm.

Să se calculeze viteza unghiulară a Pămîntului în mişcarea sa de rotaţie în jurul axei polilor.

Viteza unghiulară a unei roţi este de 21 rad/s. Să se determine numărul învîrtiturilor pe minut.

Rotindu-se uniform, elicea unei mori de vînt face 40 de rotaţii în 5 minute. Care este viteza sa unghiulară în radiani pe secundă?

Un ax se învîrteşte cu viteza unghiulară $\omega = \frac{2\pi}{9}$ rad./s. În cît timp execută o rotaţie completă?

Un disc execută într-un minut 320 de rotaţii complete. Să se calculeze viteza sa unghiulară în radiani pe secundă.

Să se exprime în grade sexagezimale şi în radiani unghiul rotaţiei unui volant dacă execută:

a) 2 rotaţii complete; *b)* 2, 3 rotaţii complete; *c)* $\frac{5}{8}$ rotaţii complete.

O roată cu raza de 1,2 m face 300 învîrtituri într-un minut.
a) Să se afle viteza ei unghiulară ω (în rad/s).
b) Să se afle viteza liniară ($V = \omega R$) a unui punct de pe circumferinţa roţii.

Care este viteza unghiulară a mişcării de rotaţie a acelor unui ceas (acul orar, minutarul, secundarul)?

Să se exprime în radiani, grade sexagezimale şi centezimale unghiul format de limbile unui ceas la 2^h20^m.

Două mobile A şi B situate pe un cerc, decalate cu 90°, se deplasează începînd mişcarea în acelaşi moment. Mobilul A descrie în fiecare minut un arc de 20°, iar mobilul B în acelaşi timp un arc de —10°. După cîte minute se produce prima, a treia, a n-a întîlnire a mobilelor?

Se consideră un dreptunghi $MNPR$, înscris într-un cerc, astfel ca mijlocul arcului MR să coincidă cu originea arcelor A. Ştiind că arcul AM este egal cu 35°15′33″, să se exprime în grade sexagezimale arcele AN, AP, AR, presupuse mai mici ca o circumferinţă, sensul pozitiv al arcelor fiind sensul $MNPR$.

Capitolul 2

Funcții trigonometrice

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă se bucură de cîteva proprietăți care simplifică rezolvarea ecuațiilor trigonometrice, trasarea graficelor ș.a.

1° *Periodicitatea.* Funcțiile sinus și cosinus admit perioada 2π; funcțiile tangentă și cotangentă admit perioada π.

2° *Paritatea sau imparitatea.* Funcția cosinus este pară; funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt impare.

Dacă într-un anumit interval funcția $f(x)$ admite valori extreme (maxime și minime), atunci $\min f(x) \leqslant f(x) \leqslant \max f(x)$.

În rezolvarea problemelor de maxim și minim vom ține seama că:

$\min \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = -1$, $\max \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi\right) = 1$;

$\min \cos x = \cos(\pi + k2\pi) = -1$, $\max \cos x = \cos(k2\pi) = 1$ $(k \in Z)$* și de următoarele teoreme**:

Teorema I. Produsul mai multor puteri raționale pozitive ale unor factori pozitivi, variabili, de sumă constantă, este maxim cînd acești factori sînt proporționali cu exponenții lor, dacă aceasta este posibil.

Teorema II. Suma unor numere pozitive, variabile, astfel încît produsul unor puteri raționale pozitive ale acestor numere să fie constant, este minimă cînd aceste numere sînt proporționale cu exponenții lor, dacă aceasta este posibil.

* Cu Z s-a notat mulțimea numerelor întregi.

** Pentru demonstrații poate fi consultată lucrarea — S. I. Novoselov, *Curs special de algebră elementară* (traducere din limba rusă), București, Editura tehnică, 1955, pg. 459.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. *Să se calculeze expresia:* $E = \sin(180° + \alpha)\cos(360° - \alpha)\operatorname{ctg}(270° - \alpha)$, *dacă* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{5}$.

Soluţie. Folosind formulele de reducere, putem scrie: $E = -\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha$. Mai departe, cu ajutorul formulelor $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, expresia precedentă devine: $E = -\sin^2\alpha = -\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

de unde, înlocuind $\operatorname{tg}\alpha$ prin 5: $E = -\frac{25}{26}$.

2. *Să se calculeze expresia:* $E = \frac{\operatorname{tg}(-150°)\cos(-210°)\cos(-60°)}{\operatorname{ctg}(-240°)\sin(-330°)}$.

Soluţie. Ţinînd seama că funcţia cosinus este pară, iar funcţiile sinus, tangentă şi cotangentă sînt impare, expresia devine:

$$E = -\frac{\operatorname{tg}150°\cos 210°\cos 60°}{\operatorname{ctg}240°\sin 330°}$$

sau:

$$E = -\frac{\operatorname{tg}(180° - 30°)\cos(180° + 30°)\cos 60°}{\operatorname{ctg}(270° - 30°)\sin(360° - 30°)}$$

sau încă, folosind formulele de reducere: $E = -\frac{-\operatorname{tg}30°(-\cos 30°)\cos 60°}{\operatorname{tg}30°(-\sin 30°)}$.

Însă $\cos 60° = \sin 30°$. Aşadar: $E = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. *Să se demonstreze egalitatea:*

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\cos\left(3\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)} = \frac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(-\alpha)-\cos\left(3\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}.$$

Soluţie. Notînd cu E_1 şi E_2, respectiv, membrul stîng şi membrul drept al egalităţii, obţinem:

$$E_1 = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}.$$

Analog: $E_2 = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha - (-\sin\alpha)} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$.

Prin urmare: $E_1 = E_2$.

Observaţie: Egalitatea nu are sens pentru $\alpha = k\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$

4. *Să se exprime prin funcţii de argumentul* x *funcţiile:*

$$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

unde k *este un număr întreg arbitrar.*

Soluţie. Dacă k este număr par $(k = 2l)$, atunci:

$$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + l\pi) = (-1)^l\cos x = (-1)^{\frac{k}{2}}\cos x;$$

$$\text{în mod analog: } \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}}\sin x.$$

Dacă k este număr impar ($k = 2l + 1$), atunci:

$$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + l\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x + l\pi) =$$

$$= (-1)^{l+1} \sin x = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin x;$$

în mod analog avem: $\sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos x.$

5. *Să se determine intervalele de monotonie ale funcției $f(x) = \cos 2x$.*

Soluție. Funcția dată este periodică, cu perioada $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

Pe de altă parte: $f(-x) = \cos 2(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$, deci $\cos 2x$ este funcție pară.

Prin urmare, este suficient să i se studieze variația pe un interval de lungime $\frac{\pi}{2}$, de exemplu, pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Dacă x crește de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, atunci $2x$ crește de la 0 la π.

Fiindcă pe intervalul $[0, \pi]$ funcția cos este strict descrescătoare, rezultă că $f(x)$este strict descrescătoare pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și, datorită parității, strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Ținînd seama de periodicitate, obținem următorul rezultat: $f(x)$ este strict crescătoare pe fiecare din intervalele $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right]$ și strict descrescătoare pe fiecare din intervalele $[k\pi, \pi + k\pi]$, k fiind un număr întreg arbitrar.

6. *Se consideră funcția:*

$$f(x) = a\cos x + b\sin x,$$

unde** a **și** b **sînt constante arbitrare. Să se arate că dacă** $f(x)$ **se anulează pentru două valori** x_1 **și** x_2**, astfel ca** $x_1 - x_2 \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)**, atunci funcția** $f(x)$ **este identic nulă.

Soluție. Afirmația făcută va fi demonstrată dacă arătăm că $a = b = 0$.

Să presupunem că $a^2 + b^2 \neq 0$, adică cel puțin unul dintre numerele a, b este nenul. Atunci:

$$f(x) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\sin x\right)\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi),$$

unde: $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Fie acum x_1 și x_2 două valori pentru care $f(x_1) = f(x_2) = 0$ și $x_1 - x_2 \neq k\pi$.

Fiindcă $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, atunci $\sin(x_1 + \varphi) = \sin(x_2 + \varphi) = 0$, de unde: $x_1 + \varphi = k_1\pi_1$, $x_2 + \varphi = k_2\pi$, k_1, k_2 fiind numere întregi. De aici obținem: $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)\pi$, ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare $a^2 + b^2 = 0$, de unde $a = b = 0$.

7. *Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției:*

$$a)\ f(x) = \arcsin\frac{2x}{1 + x^2}; \qquad b)\ f(x) = \arccos\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x + 1}.$$

Soluție. a) Domeniul maxim de definiție este format din mulțimea punctelor x care satisfac inegalitatea:

$$\left|\frac{2x}{1 + x^2}\right| \leqslant 1$$

sau, ținînd seamă de proprietățile modulului: $(|x| - 1)^2 \geqslant 0$.

Deoarece ultima inegalitate este satisfăcută pentru orice x, deducem că domeniul maxim de definiţie al funcţiei este axa reală.

b) Problema revine la rezolvarea sistemului de inecuaţii:

$$-1 \leqslant \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x + 1} \leqslant 1$$

sau, după transformări:

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2 + 1}{(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)} \geqslant 0, \\ \dfrac{x}{(x+1)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)} \geqslant 0. \end{cases}$$

Pentru prima inecuaţie a sistemului precedent se obţin soluţiile:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

iar pentru a doua: $x \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup [0, +\infty)$.

Intersectînd cele două mulţimi, deducem că domeniul maxim de definiţie al funcţiei este intervalul $[0, +\infty)$.

8. *Să se arate că funcţia* $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{3}\,x$ *nu este periodică.*

Soluţie. Funcţiile $\sin \sqrt{2}\,x$ şi $\cos \sqrt{3}\,x$ sînt periodice, cu perioadele, respectiv, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$ şi $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Dacă $f(x)$ admite perioada T, atunci numerele $T : \dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$ şi $T : \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$ sînt întregi. De aici rezultă că $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ este număr raţional, ceea ce nu este adevărat. Prin urmare, funcţia dată nu este periodică.

9. *Să se calculeze:*

$$a)\ \arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]; \qquad b)\ \operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right].$$

Soluţie. *a)* $\sin\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\sin\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Prin urmare:

$$\arcsin\left[\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right] = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

b) Notînd $\operatorname{arcctg}\left[\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right] = \alpha$, obţinem: $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right) = \operatorname{ctg}\alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$.

Egalitatea precedentă este satisfăcută numai pentru $\alpha = \pi - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{4\pi}{5}$, fiindcă pe intervalul $(0, \pi)$ funcţia cotangentă este strict descrescătoare.

10. *Să se calculeze:*

$$a)\ \operatorname{tg}\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \qquad b)\ \sin\left[2 \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right].$$

Soluţie. *a)* $\arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Prin urmare: $\operatorname{tg}\left(2 \arcsin \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

b) Făcînd notaţia $\arccos\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \alpha$, obţinem: $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Aşadar:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha = +2\cos\alpha\sqrt{1-\cos^2\alpha} = 2\left(-\frac{3}{5}\right)\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{24}{25}.$$

11. ***Să se exprime*** $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$ ***prin*** arcsin.

Soluţia 1°. Avem: $-1 < -\frac{2}{3} < 0.$

Prin urmare, dacă notăm $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \alpha$, atunci $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, de unde $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi < 0.$

Pe de altă parte:

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

De aici rezultă că: $\alpha - \pi = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

şi deci: $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}}{3}.$

Soluţia 2°. Ţinînd seama de identitatea $\arccos\alpha + \arcsin\alpha = \frac{\pi}{2}$,

se obţine direct: $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$ sau, deoarece funcţia arcsin este impară: $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{3}.$

12. ***Să se calculeze:***

a) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right]$; *b)* $\cos\left[2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)\right]$.

Soluţie. a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}.$

Prin urmare:

$$\sin\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right] = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

b) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$

Prin urmare:

$$\cos\left[2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)\right] = \cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

13. ***Să se calculeze:***

a) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{15}{17}\right)$; *b)* $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{4}{5}\right]$.

Soluţie. a) Notînd $\arccos\frac{3}{5} = \alpha$, $\arccos\frac{15}{17} = \beta$, avem:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

Însă: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{15}{17}$. (2)

Pe de altă parte: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, deci:

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} = \frac{4}{5}; \quad \sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{15^2}{17^2}} = \frac{8}{17}. \quad (3)$$

Ţinînd seama de (2) şi (3), relaţia (1) devine: $\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{17}+\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}=\frac{84}{85}$.

b) Notînd $\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)=\alpha$, $\arcsin\frac{4}{5}=\beta$, avem:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

Însă: $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\quad\sin\beta=\frac{4}{5}$. (2)

Pe de altă parte: $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0; 0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

de unde: $\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}=\frac{5}{13}$;

$\cos\beta=+\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\frac{3}{5}$. (3)

Ţinînd seama de (2) şi (3), relaţia (1) devine: $\cos(\alpha+\beta)=\frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$.

Observaţie. În rezolvarea exerciţiului se putea ţine seama de faptul că funcţia arcsin este impară.

14. *Să se demonstreze egalităţile: a)* $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=1$;

b) $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$; *c)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. a) Fiindcă $\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}$,

atunci: $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Aşadar $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)=1$.

b) Notînd $\arcsin\frac{4}{5}=\alpha$, rezultă că $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, de unde:

$$\cos\alpha=+\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\frac{3}{5}$$

şi deci: $\alpha=\arccos\frac{3}{5}$.

Aşadar, membrul stîng al egalităţii devine $\arcsin\frac{3}{5}+\arccos\frac{3}{5}$ şi, conform unei formule cunoscute, este egal cu $\frac{\pi}{2}$.

c) Notînd $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}=\beta$ şi ţinînd seama de faptul că funcţia arctg este strict crescătoare, din inegalităţile:

$$0<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2};\quad 0<\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

obţinem: $0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$. (1)

Pe de altă parte: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) obţinem: $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, c.c.t.d.*

15. ***Să se demonstreze egalităţile:*** ***a)*** $\arcsin \frac{12}{13} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{33}{65}$;

b) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Soluţie. a) Notînd $\arcsin \frac{12}{13} = \alpha$, $\arcsin \frac{3}{5} = \beta$ şi ţinînd seama de inegalităţile:

$0 < \frac{12}{13} < 1$, $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < 1$, rezultă că: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{2}$, de unde: $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. (1)

Pe de altă parte:

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13};\ \cos \beta = +\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{4}{5},$$

iar: $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{65}$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că: $\alpha - \beta = \arcsin \frac{33}{65}$.

b) Se constată uşor că:

$$\frac{\pi}{6} < \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2};\quad \frac{\pi}{6} < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Luînd tangenta ambilor membri ai egalităţii date, obţinem:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{7}{4};\ \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{5 - \frac{1}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

Prin urmare, ţinînd seama de (1) şi de relaţiile precedente:

$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} \frac{7}{4}$; $\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{7}{4}$, de unde rezultă egalitatea dată.

16. ***Să se traseze graficul funcţiei*** $f(x) = |\sin x|$.

Soluţie. $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, \text{ dacă } \sin x \geqslant 0, \\ -\sin x, \text{ dacă } \sin x \leqslant 0 \end{cases}$

sau $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, \text{ dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ -\sin x, \text{ dacă } x \in [k2\pi - \pi, k2\pi], \end{cases}$

unde k este un număr întreg arbitrar.

De aici rezultă graficul funcţiei (fig. II, 1).

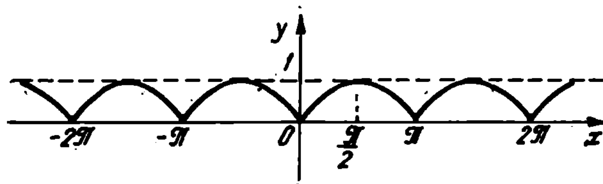


Fig. II, 1

17. ***Să se traseze graficul funcţiei:*** $f(x) = \sin |x|$.

Soluţie. $\sin |x| = \begin{cases} \sin x, \text{ dacă } x \geqslant 0, \\ -\sin x, \text{ dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$

---

* Ceea ce trebuia demonstrat.

Prin urmare, graficul funcţiei date este cel din figura II, 2.

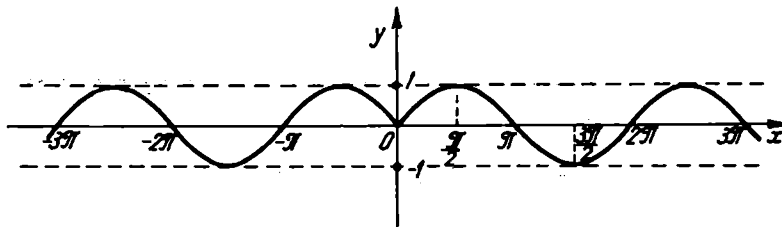


Fig. II, 2

18. *Să se traseze graficul funcţiei:* $f(x) = \sin x - |\sin x|$.

Soluţie. $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, \text{ dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ -\sin x, \text{ dacă } x \in [-\pi + k2\pi, k2\pi], \end{cases}$

k fiind un număr întreg arbitrar.

Aşadar: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ 2\sin x, \text{ dacă } x \in [-\pi + k2\pi, k2\pi], \end{cases}$

de unde se obţine fără dificultate graficul (fig. II, 3).

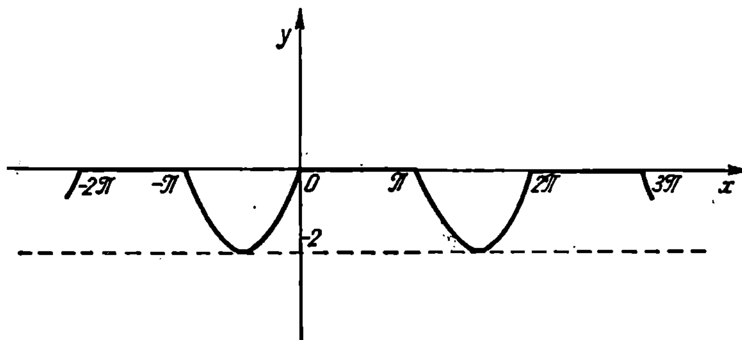


Fig. II, 3

19. *Să se determine amplitudinea, perioada, frecvenţa şi faza iniţială şi să se construiască graficul oscilaţiei armonice simple* $y = 2\sin\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Soluţie. Ecuaţia unei oscilaţii armonice simple poate fi scrisă sub forma $y = a \sin(\omega t + \varphi)$, unde $|a|$ este amplitudinea oscilaţiei, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ perioada mişcării, $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ frecvenţa mişcării, iar φ faza iniţială.

În cazul problemei, $|a| = 2$, $T = 4\pi$, $\nu = \frac{1}{4\pi}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Cu ajutorul tabelului următor:

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$3\frac{\pi}{2}$		2π		$5\frac{\pi}{2}$		3π		$7\frac{\pi}{2}$		4π
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

se poate construi graficul oscilației în intervalul $[0, 4\pi]$, de lungime egală cu perioada sa (fig. II, 4).

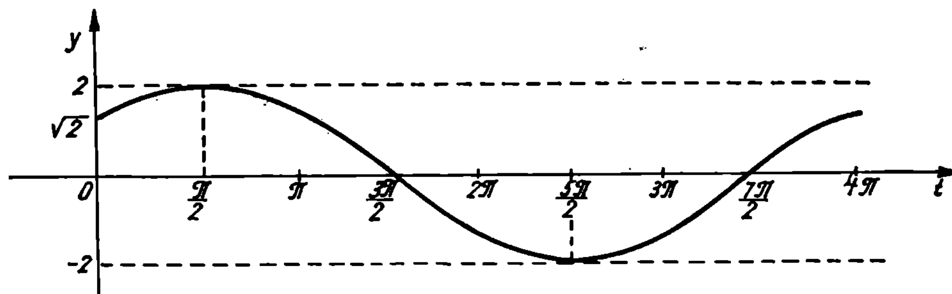


Fig. II, 4

20. *Să se traseze graficul funcției* $f(x) = \cos\frac{1}{x}$.

Soluție. Domeniul maxim de definiție al funcției este $R - \{0\}$.

Pe de altă parte, funcția dată este pară, deci este suficient s-o studiem în intervalul $(0, +\infty)$.

Punctele de intersecție a curbei cu axa absciselor se determină din relația $\cos\frac{1}{x} = 0$, de unde: $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ și deci $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$.

Din inegalitatea $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ rezultă că curba este cuprinsă în banda determinată de dreptele $y = \pm 1$.

Valoarea maximă, egală cu 1, este luată de funcție în punctele în care $\cos\frac{1}{x} = 1$, adică $x = \frac{1}{k2\pi}$. Valoarea minimă, egală cu -1, este luată de funcție în punctele în care $\cos\frac{1}{x} = -1$, adică $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$.

Cu ajutorul tabelului următor:

x	$0\ldots$	$\frac{1}{4\pi}$		$\frac{2}{7\pi}$		$\frac{1}{3\pi}$		$\frac{2}{5\pi}$		$\frac{1}{2\pi}$		$\frac{2}{3\pi}$		$\frac{1}{\pi}$		$\frac{2}{\pi}$		$+\infty$
$y = \cos\frac{1}{x}$	$\mid\ldots$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

se construiește graficul funcției pe intervalul $(0, +\infty)$. Ținînd seama că funcția este pară, prin simetrie față de axa ordonatelor, se construiește graficul său pe $R - \{0\}$ (fig. II, 5).

21. *Să se traseze graficul funcției:* $f(x) = \cos(2 \arccos x)$.

Soluție. Folosind identitățile $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$, $\cos(\arccos \alpha) = \alpha$, putem scrie: $f(x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-1, 1]$.

Graficul acestei funcții este un arc de parabolă (fig. II, 6).

Observație. Se poate arăta că funcțiile $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n \in N)$ sînt polinoame de gradul n, definite pe intervalul $[-1, 1]$. Ele se numesc polinoamele lui Cebîșev și satisfac relația de recurență $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

22. *Să se traseze graficul funcției:* $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$.

Soluție. Ținînd seama că funcția arcsin u este definită pentru $-1 \leqslant u \leqslant 1$, se obțin inegalitățile:

$$0 \leqslant 1 - x \leqslant 1;\ 0 \leqslant x \leqslant 1$$

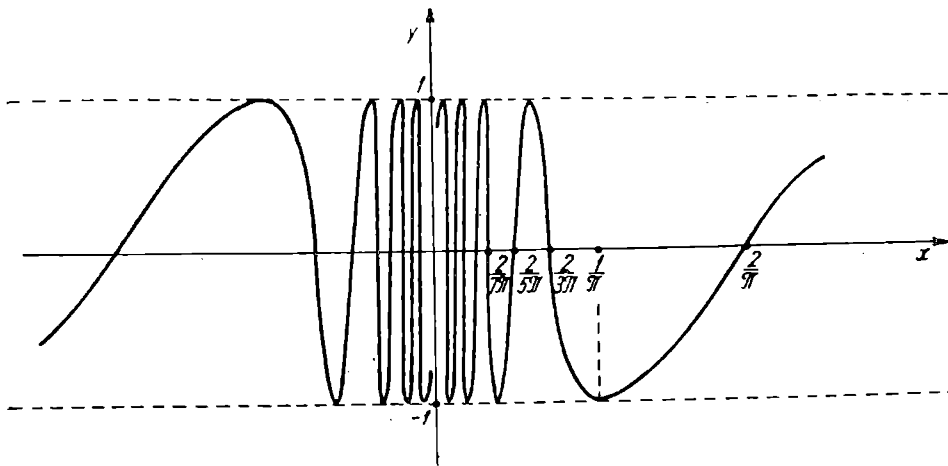


Fig. II, 5.

20. *Să se traseze graficul funcției :* $f(x)=\cos(2\arccos x)$.

Soluție. Folosind identitățile $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, $\cos(\arccos\alpha)=\alpha$, putem scrie : $f(x)=2x^2-1$, $x\in[-1, 1]$.

Graficul acestei funcții este un arc de parabolă (fig. II, 6).

Observație. Se poate arăta că funcțiile $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ $(n\in N)$ sînt polinoame de gradul n, definite pe intervalul $[-1, 1]$. Ele se numesc polinoamele lui Cebîșev și satisfac relația de recurență $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$.

21. *Să se traseze graficul funcției :* $f(x)=\arcsin\sqrt{1-x}+\arcsin\sqrt{x}$.

Soluție. Ținînd seama că funcția $\arcsin u$ este definită pentru $-1\leqslant u\leqslant 1$, se obțin inegalitățile :

$$0\leqslant 1-x\leqslant 1\ ;\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

care sînt satisfăcute pentru $0\leqslant x\leqslant 1$. Așadar, funcția dată este definită pe intervalul $[0, 1]$.

Pentru aceste valori ale argumentului :

$$\arcsin\sqrt{1-x}=\arccos\sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2}=\arccos\sqrt{x}$$

Prin urmare : $f(x)=\arccos\sqrt{x}+\arcsin\sqrt{x}=\dfrac{\pi}{2}$.

Graficul funcției este un segment de dreaptă paralel cu axa absciselor (fig. II, 7).

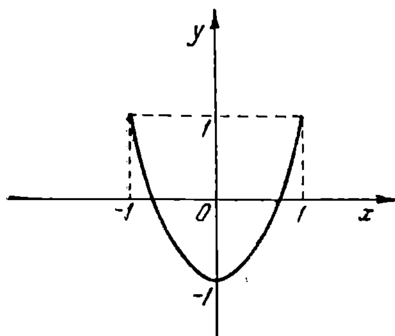


Fig. II, 6

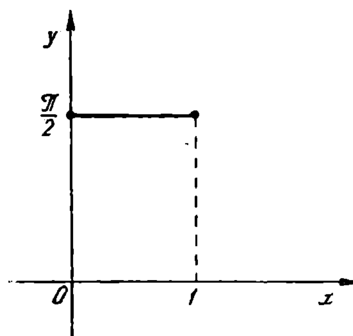


Fig. II. 7.

Aşadar, pentru $x \geqslant 0$, avem: $f(x) = 2 \text{ arctg } x$, iar pentru $x \in R$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 \text{ arctg } x, & \text{dacă } x \geqslant 0, \\ -2 \text{ arctg } x, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Acum, graficul funcţiei se poate construi cu uşurinţă (fig. II, 8).

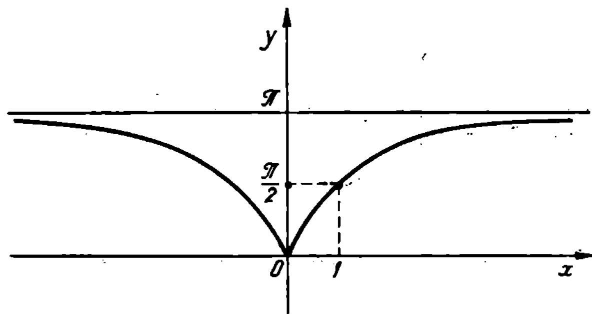


Fig. II, 8

24. *Să se traseze graficul funcţiei:* $f(x) = \text{arctg } x + \text{arctg } \frac{1-x}{1+x}$.

Soluţie. $$\text{tg} f(x) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \cdot \frac{1-x}{1+x}} = 1. \quad (1)$$

Însă: $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg } u < \frac{\pi}{2}$, deci:

$$-\pi < f(x) < \pi. \quad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă că $f(x) = \frac{\pi}{4}$, sau $f(x) = -3\frac{\pi}{4}$. Evident, ultima egalitate poate avea loc numai dacă $x < 0$ şi $\frac{1-x}{1+x} < 0$, adică pentru $x < -1$. Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, & \text{dacă } x < -1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

şi graficul său este format din două semidrepte paralele cu axa absciselor (fig. II, 9).

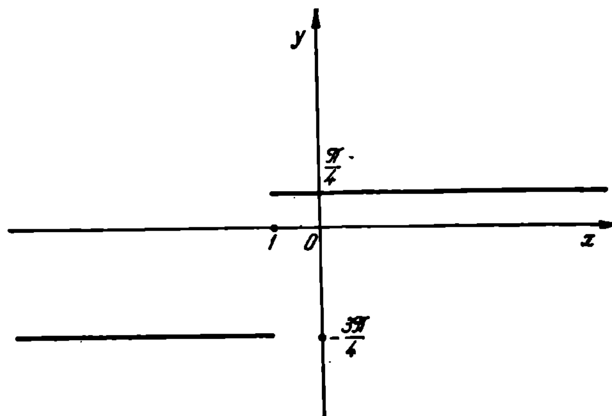


Fig. II, 9

Maxime şi minime trigonometrice

25. *Un proiectil iese din ţeava unui tun cu viteza iniţială v_0 sub un unghi α cu orizontala. Să se determine înclinarea ţevii, astfel încît bătaia tunului să fie maximă (se neglijează rezistenţa aerului).*

Soluţie. În vid, proiectilul descrie un arc de parabolă. Bătaia tunului este lungimea segmentului OA (fig. II, 10).

Dacă $M(x, y)$ este un punct aparţinînd traiectoriei, atunci:

$$x = v_0 t \cos \alpha,\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

unde t este timpul.

Coordonatele punctului A sînt date de soluţia pozitivă a sistemului:

$$\begin{cases} y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0, \\ x = v_0 t \cos \alpha. \end{cases}$$

Din prima ecuaţie a sistemului, obţinem:

$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ şi deci: $OA = x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Fiindcă $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ şi $\max \sin 2\alpha = 1$, atunci:

$\max x = \frac{v_0^2}{g}$ şi se obţine pentru $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

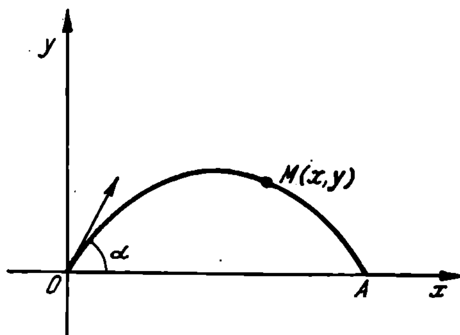


Fig. II, 10

26. *Să se determine minimul funcţiei:* $f(x) = (\sin x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţie. Funcţia dată poate fi scrisă sub forma:

$$f(x) = 5 + \frac{4}{\sin^2 2x},\quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde: $\min f(x) = 5 + \frac{4}{\max \sin^2 2x} = 5 + \frac{4}{1} = 9$ şi se obţine pentru $x = \frac{\pi}{4}$.

27. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:* $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$.

Soluţie. Folosind identităţile:

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$, $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$, funcţia considerată se poate scrie sub forma: $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Însă: $\max \sin^2 2x = 1$; $\min \sin^2 2x = 0$.

Aşadar:

$$\min f(x) = 1 - \frac{3}{4} \max \sin^2 2x = \frac{1}{4};\quad \max f(x) = 1 - \frac{3}{4} \min \sin^2 2x = 1.$$

28. *Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat.*

Soluţie. Fie x, y dimensiunile dreptunghiului înscris în cercul de rază R, iar S aria sa.

Dacă α este unul din unghiurile ascuţite ale triunghiului dreptunghic format de două laturi consecutive ale dreptunghiului şi de diagonala corespunzătoare (fig. II, 11), atunci: $x = 2R \sin\alpha$, $y = 2R \cos\alpha$, de unde: $S = xy = 2R^2 \sin 2\alpha$. Prin urmare: $\max S = 2R^2 \max \sin 2\alpha = 2R^2$ şi se obţine pentru $\alpha = 45°$.

În concluzie, dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat este pătratul.

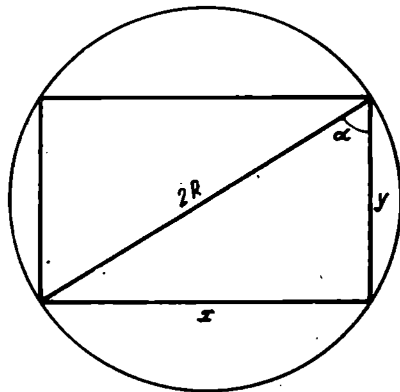


Fig. II, 11

29. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:* $f(x) = a \sin x + b$.

Soluţie. Ţinînd seama de inegalităţile: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, deducem că:

$$-a \leqslant a \sin x \leqslant a, \quad \text{dacă } a > 0$$
$$\text{şi } a \leqslant a \sin x \leqslant -a, \quad \text{dacă } a < 0,$$
$$\text{de unde: } b - a \leqslant a \sin x + b \leqslant b + a, \quad \text{dacă } a > 0$$
$$\text{şi } b + a \leqslant a \sin x + b \leqslant b - a, \quad \text{dacă } a < 0.$$

Inegalităţile precedente pot fi scrise împreună sub forma:

$$b - |a| \leqslant a \sin x + b \leqslant b + |a|,$$
$$\text{de unde: } \min f(x) = b - |a|; \quad \max f(x) = b + |a|.$$

Observaţie. Raţionamentul făcut şi concluzia rămîn valabile dacă se înlocuieşte $\sin x$ cu $\cos x$.

30. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:*

$$f(x) = a \sin x + b \cos x \ (ab \neq 0).$$

Soluţie. Notînd $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi \left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$, putem scrie:

$$f(x) = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \varphi),$$

unde se ia semnul plus sau minus, după cum $a > 0$ sau $a < 0$.

$$\text{Deoarece: } |f(x)| = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin (x + \varphi)| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\text{adică: } -\sqrt{a^2 + b^2} \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$\text{rezultă că: } \min f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \max f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

31. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:* $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$.

Soluţie. Ţinînd seama de identităţile:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

funcţia dată se poate exprima liniar în $\sin 2x$ şi $\cos 2x$:

$$f(x) = \frac{a + c}{2} + \frac{1}{2} [(c - a) \cos 2x + b \sin 2x].$$

Prin urmare (v. problema precedentă):

$$\frac{a + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{a + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c - a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

de unde:

$$\min f(x) = \frac{a + c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}; \quad \max f(x) = \frac{a + c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}.$$

32. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:* $f(x) = \cos 2x + \cos x$.

Soluţie. Notînd $\cos x = t$, problema revine la determinarea minimului şi maximului funcţiei: $\varphi(t) = 2t^2 + t - 1$, $t \in [-1, 1]$.

Fiindcă funcţia $\varphi(t)$ este strict descrescătoare pe intervalul $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$ şi strict crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$, obţinem: $\min f(x) = \min \varphi(t) = \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$,

$$\max f(x) = \max \varphi(t) = \max [\varphi(-1), \varphi(1)] = \max (0, 2) = 2^*.$$

33. *Să se determine maximul funcţiei:* $f(x) = -\sin^2 x + 3 \sin x + 10$.

Soluţie. Notînd $\sin x = t$, problema revine la determinarea maximului funcţiei $\varphi(t) = -t^2 + 3t + 10$, cu condiţia ca $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

---

* Prin $\max (a, b)$ se înţelege cel mai mare dintre numerele a, b.

Deoarece funcţia $\varphi(t)$ este strict crescătoare pe intervalul $[-1, 1]$, obţinem: $\max \varphi(t) = \varphi(1) = 12$, $t \in [-1, 1]$.

34. *Să se determine valorile extreme ale funcţiei:* $f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$ *pe segmentul* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Soluţie. Notînd $\sin x = t$, problema revine la determinarea valorii maxime şi a celei minime a trinomului:

$$\varphi(t) = t^2 + pt + q, \ t \in [-1, 1].$$

După cum se ştie, acesta are un minim în punctul $t = -\frac{p}{2}$, pe intervalul $\left(-\infty, -\frac{p}{2}\right)$ este strict descrescător, iar pe intervalul $\left(-\frac{p}{2}, +\infty\right)$ este strict crescător.

Sînt posibile următoarele cazuri:

1° $-\frac{p}{2} \leqslant -1$, adică $p \geqslant 2$. În acest caz, pe segmentul $[-1, 1]$ trinomul este strict crescător; prin urmare $f(x)$ ia valoarea minimă pentru $t = -1$ $\left(x = -\frac{\pi}{2}\right)$ şi valoarea maximă pentru $t = 1$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\min f(x) = \varphi(-1) = 1 - p + q; \ \max f(x) = \varphi(1) = 1 + p + q.$$

2° $-1 < -\frac{p}{2} < 1$, adică $-2 < p < 2$. Atunci trinomul ia valoarea minimă în punctul $t = -\frac{p}{2}$ $\left(x = -\arcsin \frac{p}{2}\right)$:

$$\min f(x) = \varphi\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Valoarea maximă a trinomului este $\max [\varphi(-1), \varphi(1)]$, adică:

$$\max f(x) = \max (1 - p + q, 1 + p + q) = 1 + |p| + q.$$

3° $-\frac{p}{2} \geqslant 1$, adică $p \leqslant -2$. Pe segmentul $[-1, 1]$ trinomul este strict descrescător; prin urmare $f(x)$ ia valoarea minimă pentru $t = 1$ $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$ şi valoarea maximă pentru $t = -1$ $\left(x = -\frac{\pi}{2}\right)$:

$$\min f(x) = \varphi(1) = 1 + p + q; \ \max f(x) = \varphi(-1) = 1 - p + q.$$

35. *Să se determine minimul funcţiei:* $f(x) = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţia 1. Notînd $\operatorname{tg} x = t$, funcţia dată se scrie: $\varphi(t) = \frac{t^2 + 3}{t}$, $t \in (0, +\infty)$.

Dacă funcţia $\varphi(t)$ admite un minim a $(a > 0)$, atunci inegalitatea: $\frac{t^2 + 3}{t} \geqslant a$ este satisfăcută pentru orice $t \in (0, +\infty)$.

Însă inegalitatea precedentă este echivalentă cu inegalitatea: $t^2 - at + 3 \geqslant 0$, care este satisfăcută pentru orice $t > 0$, dacă şi numai dacă: $\Delta = a^2 - 12 \leqslant 0$, adică pentru $a \in (0, 2\sqrt{3}]$.

De aici rezultă că $\min f(x) = \min \varphi(t) = 2\sqrt{3}$ şi se obţine pentru $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, adică pentru $x = \frac{\pi}{3}$.

Soluţia 2. Notînd $\operatorname{tg} x = u$, $3 \operatorname{ctg} x = v$ şi ţinînd seama de identitatea:

$$(u + v)^2 = (u - v)^2 + 4uv,$$

obţinem: $[f(x)]^2 = (\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x)^2 + 12$.

Însă $(\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{ctg}\, x)^2 \geqslant 0$, deci: $\min [f(x)]^2 = \min (\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{ctg}\, x)^2 + 12 = 12$ și se obține pentru $\mathrm{tg}\, x - 3\,\mathrm{ctg}\, x = 0$, adică pentru $x = \frac{\pi}{3}$. Fiindcă $f(x) > 0$, rezultă că: $\min f(x) = \sqrt{\min [f(x)]^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

36. ***Să se determine valorile extreme ale funcției:***

$$f(x) = \cos^m x \sin^n x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

unde m și n sînt numere raționale pozitive date.

Soluție. Scriind funcția sub forma: $f(x) = (\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}$ și ținînd seama de identitatea $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, rezultă că sîntem în condițiile teoremei I. Așadar, produsul precedent este maxim cînd factorii sînt proporționali cu exponenții lor (dacă este posibil). În cazul de față există $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, astfel încît să fie satisfăcută egalitatea:

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{m}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{n}{2}}.$$

Într-adevăr, aplicînd o proprietate a rapoartelor egale, obținem:

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{m}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\frac{m+n}{2}},$$

de unde: $\sin^2 x = \frac{n}{m+n}$; $\cos^2 x = \frac{m}{m+n}$

și deci: $\mathrm{tg}\, x = \sqrt{\frac{n}{m}}$

sau: $x = \mathrm{arctg} \sqrt{\frac{n}{m}}$.

Evident: $\max f(x) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}}$.

Pentru a determina $\min f(x)$ este suficient să observăm inegalitățile $\sin^n x \geqslant 0$, $\cos^m x \geqslant 0$, de unde rezultă că: $\min f(x) = 0$ și acesta se obține pentru $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$.

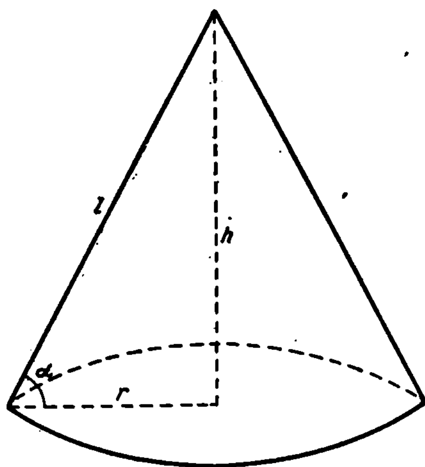


Fig. II, 12

37. ***Să se găsească conul circular drept de volum maxim a cărui generatoare are lungimea constantă l*** (fig. II, 12).

Soluție. Fie α unghiul format de generatoare cu planul bazei conului, h înălțimea conului, iar r raza bazei.

Atunci: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (l\cos\alpha)^2 \cdot l \sin\alpha = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\alpha \sin\alpha$

sau: $V = \frac{1}{3}\pi l^3 \cos^2\alpha\, (\sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}}$.

Refăcînd raționamentul din problema precedentă, obținem: $\max V = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$ și, în acest caz: $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

38. *Să se determine minimul funcției:* $f(x) = \mathrm{tg}^m x + \mathrm{ctg}^n x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *unde* m *și* n *sînt numere raționale pozitive date.*

Soluție. Din identitatea: $(\mathrm{tg}^m x)^{\frac{1}{m}} \cdot (\mathrm{ctg}^n x)^{\frac{1}{n}} = 1$,

rezultă că se poate aplica teorema II. Obținem: $\dfrac{\mathrm{tg}^m x}{\frac{1}{m}} = \dfrac{\mathrm{ctg}^n x}{\frac{1}{n}} = \lambda$,

de unde, după cîteva calcule simple: $\lambda = (m^n n^m)^{\frac{1}{m+n}}$.

Prin urmare: $\min f(x) = \lambda \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{m+n}{mn} (m^n n^m)^{\frac{1}{m+n}}$

și, în acest caz: $x = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\lambda}{m}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Exerciții și probleme propuse

1. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:
a) $\mathrm{ctg}\, 675° \,\mathrm{cosec}\, 280° - \mathrm{tg}\, 1\,845° \sin 460°$;
b) $\cos x \,\mathrm{tg}\, (180° + x)\, \mathrm{tg}\, (270° - x)\, \mathrm{cosec}\, (90° - x)$;
c) $\dfrac{\sin(\pi - x)\, \mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \mathrm{ctg}\, (\pi - x)}$.

2. Dacă restul împărțirii numărului întreg k la 7 este unul din numerele 1, 3, 4, atunci:

$$\cos\left(k \cdot \frac{\pi}{7} - \frac{13\pi}{14}\right) + \cos\left(k \cdot \frac{3\pi}{7} - \frac{3\pi}{14}\right) + \cos\left(k \cdot \frac{5\pi}{7} - \frac{3\pi}{14}\right) = 0.$$

3. Să se studieze din punct de vedere al periodicității funcțiile: *a)* $\mathrm{tg}\, 3x$; *b)* $\sqrt{\sin^2 x}$; *c)* $x - \mathrm{tg}\, x$; *d)* $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x}$; *e)* $\mathrm{ctg}\, \dfrac{1}{x}$.

4. Să se determine perioadele funcțiilor: *a)* $\sin^2 2x + \mathrm{ctg}\, 2x$; *b)* $\sin 6x \cos 15x$; *c)* $\sin 4x + \cos 6x + \mathrm{tg}\, 3x$.

5. Să se determine perioada funcției $f(x) = \sin x + \sin 3x + \ldots + \sin (2n - 1)x$.

6. Pentru ce valori întregi ale lui n funcția: $\cos nx \sin \dfrac{5x}{n}$ are perioada 3π?

7. Să se demonstreze că funcția $\cos \sqrt{x}$ nu este periodică.

8. Să se indice care din funcțiile următoare este pară sau impară:
a) $x \sin^3 x$; *b)* $\sqrt{\mathrm{tg}^2 x}$; *c)* $x + \sin x$; *d)* $|x| + \sin^2 x$; *e)* $\sin^3 x + \cos^3 x$.

9. Să se demonstreze că dacă suma: $a_1 \cos(\alpha_1 + x) + a_2 \cos(\alpha_2 + x) + \ldots$ $\ldots + a_n \cos(\alpha_n + x)$ se anulează pentru $x_1 = 0$ și $x_2 = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$, atunci ea se anulează pentru orice x.

10. Să se calculeze: *a)* $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$; *b)* $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$.

11. Să se demonstreze egalitățile: *a)* $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$;

b) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

12. Să se calculeze suma: $S_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 2^2} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$.

13. Să se găsească relația dintre funcțiile: $\arcsin\cos\arcsin x$ și $\arccos\sin\arccos x$.

14. Să se demonstreze că dacă $\alpha < \frac{1}{23}$, egalitatea $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \alpha\pi^3$ este imposibilă.

15. Să se determine domeniile valorilor funcțiilor: *a)* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in [2,4]$, *b)* $f(x) = \sin x + \arcsin(\sin x)$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

16. Să se traseze graficul oscilației obținute prin compunerea oscilațiilor armonice simple: $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x$.

17. Să se traseze graficul funcției: $f(x) = \sin(\alpha - x)\sin(\alpha + x)$, unde α este un unghi constant și $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

18. Să se traseze graficul funcției: $f(x) = \arccos(\cos x)$.

19. Să se traseze graficul funcției: $f(x) = x - \arcsin(\sin x)$.

Maxime și minime trigonometrice

20. Să se determine minimele funcțiilor: *a)* $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \pi)$;

b) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

21. Produsul tangentelor a două arce pozitive, a căror sumă este constantă și mai mică decît $\frac{\pi}{2}$, crește dacă modulul diferenței acestor arce descrește.

22. Să se determine extremele funcției: $U = \sin^2(x+y)\cos(x-y) + \sin^2(x-y)\cos(x+y)$, dacă $\sin^2 x + \sin^2 y = a$, iar x, y sînt coordonatele unui punct situat în interiorul pătratului cu centrul în origine și unul din vîrfuri în punctul $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

23. În mulțimea triunghiurilor cu aceeași bază și unghiurile de la vîrf egale să se găsească triunghiul cu perimetrul maxim.

24. Se consideră un semicerc de rază R și mulțimea triunghiurilor isoscele a căror bază conține diametrul, iar laturile egale sînt tangente semicercului. Să se determine triunghiul de arie minimă.

25. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un sector circular de rază R cu unghiul la centru 2α.

26. Un punct M se deplasează pe sfertul de cerc AB de centru O și de rază R. Să se determine poziția punctului M, astfel încît suma ariilor segmentelor subîntinse de coardele MA și MB să aibă valori extreme.

27. Să se determine valoarea maximă a perimetrului unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza dată.

28. Se consideră două cercuri tangente în punctul A. Prin punctul de contact se duc în cercurile considerate două coarde formînd între ele un unghi dat α.
Să se determine poziția acestor coarde, astfel încît aria triunghiului, ale cărui vîrfuri sînt punctul A și extremitățile coardelor, să fie maximă.

29. Diagonalele unui patrulater înscris în cercul de rază R sînt perpendiculare și punctul lor de intersecție este situat la distanța d de centrul cercului. Să se determine maximul ariei acestui patrulater.

30. Un tablou este fixat pe perete astfel încît marginea lui de jos se află cu a metri, iar cea de sus cu b metri mai sus de ochiul observatorului.
La ce distanță x de perete trebuie să se plaseze observatorul pentru a vedea tabloul sub un unghi maxim?

31. În mulțimea cilindrilor înscriși într-o sferă de rază R să se determine cilindrul a cărui arie totală este maximă.

32. Un triunghi dreptunghic se rotește în jurul ipotenuzei sale de lungime constantă a.
Să se determine triunghiul pentru care volumul corpului de rotație generat este maxim.

33. Un triunghi isoscel, ale cărui laturi egale au lungimea constantă a, se rotește în jurul paralelei dusă prin vîrf la bază.
Să se determine baza sa, astfel ca volumul corpului de rotație obținut să fie maxim.

34. Se consideră un cerc fix cu centrul în O. Fie A' un punct fix de pe circumferință și OB o rază mobilă care formează unghiul $2x$ cu OA.
Să se determine x astfel încît aria laterală a corpului generat prin rotirea coardei AB în jurul razei OA să fie maximă.

Capitolul 3

Formule fundamentale

1. Relații de bază:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad (2)$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad (3)^*$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha; \ \operatorname{cosec}^2\alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha. \quad (4)$$

2. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele:

	sin α	cos α	tg α	ctg α	sec α	cosec α
sin α	$\sin\alpha$	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{\sec\alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}$
cos α	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	$\cos\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sec\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}{\operatorname{cosec}\alpha}$
tg α	$\frac{\sin\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
ctg α	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\frac{\cos\alpha}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}$
sec α	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\frac{1}{\cos\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$	$\sec\alpha$	$\frac{\operatorname{cosec}\alpha}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2\alpha-1}}$
cosec α	$\frac{1}{\sin\alpha}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$	$\frac{\sec\alpha}{\pm\sqrt{\sec^2\alpha-1}}$	$\operatorname{cosec}\alpha$

NOTĂ. Semnul ± pus înaintea radicalilor indică faptul că funcțiile trigonometrice pot avea și valori negative cînd unghiul este mai mare decît 90°.

* Întrebuințarea lor avea de scop să ușureze calculele, înainte de a se descoperi logaritmii, deoarece transformă împărțirea prin *cosinus* și *sinus* într-o înmulțire cu *secanta* și *cosecanta*. În prezent nu se mai folosesc decît pentru a se scrie sub o formă mai simplă anumite relații trigonometrice.

3. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \quad (5)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \quad (7)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}, \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}, \quad (12)$$

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\alpha\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma, \quad (13)$$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma)=\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta-\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}, \quad (15)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\gamma}{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma-1} \quad (16)$$

4. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$, (17)

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad (19)$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}, \quad (20)$$

$$\sin 3\alpha=\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha), \quad (21)$$

$$\cos 3\alpha=\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3), \quad (22)$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}, \quad (23)$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^3\alpha-3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}. \quad (24)$$

5. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad (25)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \quad (26)$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \quad (27)$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}. \quad (28)$$

Pentru funcțiile $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ și $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ se folosesc uneori și alte formule:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \quad (27')$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (27'')$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad (28')$$

sau:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \qquad (28'')$$

6. Exprimarea funcţiilor trigonometrice ale unghiului α cu ajutorul lui $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (29)$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (30)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad (31)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}. \qquad (32)$$

Observaţie. Uneori trebuie să exprimăm funcţiile trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul funcţiilor trigonometrice ale jumătăţii de unghi. Astfel, avînd în vedere că $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$, formulele (17) şi (18) se pot scrie:

$$\sin\alpha=\sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad (33)$$

$$\cos\alpha=\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (34)$$

7. Formule pentru transformarea unor sume şi diferenţe de funcţii trigonometrice în produs:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (35)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (36)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (37)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (38)$$

sau:

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}, \qquad (38')$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \tag{39}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \tag{40}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \tag{41}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}. \tag{42}$$

Observație. Tot pentru transformarea în expresii calculabile prin logaritmi pot servi formulele (25) și (26) scrise sub altă formă:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \tag{43}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \tag{44}$$

8. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)], \tag{45}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)], \tag{46}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)], \tag{47}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \tag{48}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \tag{49}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \tag{50}$$

9. Transformarea expresiei $x = a \pm b$, într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

Punem expresia dată sub forma: $x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$, deosebind următoarele cazuri: 1° Dacă $0 < \frac{b}{a} < 1$ și este precedat de semnul $-$, putem nota $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$, de unde:

$$x = a(1 - \cos^2 \varphi) = a \sin^2 \varphi. \tag{51}$$

2° Dacă $\left|\frac{b}{a}\right| < 1$ și precedat de semnul $\pm$, putem nota $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, de unde:

$$a + b = a(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \tag{52}$$

$$a - b = a(1 - \cos \varphi) = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \tag{53}$$

3° Oricare ar fi a și b, în cazul unei sume, putem nota $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, de unde:

$$a + b = a (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}. \tag{54}$$

4° În orice situație putem nota: $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, de unde:

$$a \pm b = a(1 \pm \operatorname{tg} \varphi) = \frac{a\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right)}{\cos \varphi}. \qquad (55)$$

10. Transformarea expresiei $\sqrt{a^2 \pm b^2}$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi. 1° Expresia dată se poate scrie:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a| \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \quad \text{Notînd } \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi, \text{ obținem:}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = |a| \, |\sec \varphi| = \frac{|a|}{|\cos \varphi|}. \qquad (56)$$

2° Presupunînd $a > b$, expresia dată se scrie: $\sqrt{a^2 - b^2} = |a| \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

Notînd $\frac{b^2}{a^2} = \cos^2 \varphi$, obținem:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = |a| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |a| \, |\sin \varphi|. \qquad (57)$$

11. Transformarea expresiei $\frac{a - b}{a + b}$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

Împărțind prin a atît numărătorul cît și numitorul expresiei date și notînd $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, obținem:

$$\frac{a - b}{a + b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right). \qquad (58)$$

12. Transformarea expresiei $a \sin \alpha \pm b \cos \alpha$ într-o expresie calculabilă prin logaritmi. Dînd pe a în factor și notînd $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$, obținem:

$$a\left(\sin \alpha \pm \frac{b}{a} \cos \alpha\right) = a\left(\sin \alpha \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha\right) =$$

$$= \frac{a}{\cos \varphi} (\sin \alpha \cos \varphi \pm \sin \varphi \cos \alpha) = \frac{a \sin (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}. \qquad (59)$$

13. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi rădăcinile ecuației de gradul II: $ax^2 + bx + c = 0$.

Se consideră rădăcinile reale date de relația: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Deosebim două cazuri: 1° $\frac{c}{a} < 0$. Radicalul se poate scrie: $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$.

Deoarece $ac < 0$, putem nota: $-\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$, de unde $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sec \varphi$.

Formula dată devine: $x_{1,2} = \frac{-b \pm b \sec \varphi}{2a} = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos \varphi}\right) = -\frac{b(\cos \varphi \mp 1)}{2a \cos \varphi}$,

deci:

$$x_1 = \frac{b}{2a}\left(\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}\right) = \frac{b\sin^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi} \tag{60}$$

şi

$$x_2 = -\frac{b}{2a}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}\right) = -\frac{b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}. \tag{61}$$

2° $\frac{c}{a} > 0$ cu $b^2 - 4ac > 0$. Avem: $\pm\sqrt{b^2-4ac} = \pm b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}$.

Deoarece $b^2 > 4ac$, putem nota $\frac{4ac}{b^2} = \sin^2\varphi$.

Deci $\pm\sqrt{b^2-4ac} = \pm b\cos\varphi$. Rădăcinile devin:

$$x_1 = \frac{-b+b\cos\varphi}{2a} = -\frac{b}{2a}(1-\cos\varphi) = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{\varphi}{2}, \tag{62}$$

$$x_2 = \frac{-b-b\cos\varphi}{2a} = -\frac{b}{2a}(1+\cos\varphi) = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}. \tag{63}$$

Exerciţii şi probleme rezolvate

A. Aplicaţii ale formulelor 1—4

x1. *Ştiind că* $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ *şi că* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ *sau că* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, *să se găsească* $\cos\alpha$ *şi* $\operatorname{tg}\alpha$.

Soluţie. a) Aplicăm formula $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, şi deci

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

În faţa radicalului s-a luat semnul plus deoarece cosinusul este pozitiv în cadranul I:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Deci $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ şi $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

b) Din formula $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, deducem $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \text{deci } \operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}.$$

Atît cosinusul cît şi tangenta sînt negative în cadranul II.

2. *Dacă* α *este un unghi în cadranul III şi* $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, *să se calculeze celelalte funcţii trigonometrice ale unghiului* α.

Soluție. Din formula $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, deducem $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \text{ deci} \dots\dots\dots \operatorname{tg}\alpha = 1;$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \text{ deci} \dots\dots\dots \operatorname{ctg}\alpha = 1;$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \text{ deci} \dots\dots\dots \sec\alpha = -\sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \text{ deci} \dots\dots\dots \operatorname{cosec}\alpha = -\sqrt{2}.$$

3. *Fiind dat* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, *să se găsească* $\sin\alpha$ *și* $\cos\alpha$.

Soluție. Știind că: $\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ și $\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ (v. formulele 4),

rezultă că:
$$\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \pm\sqrt{1+\frac{9}{16}} = \pm\frac{5}{4},$$

deci:
$$\sin\alpha = \pm\frac{3}{5} \text{ și } \cos\alpha = \pm\frac{4}{5}.$$

În general, dacă se dă $\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{n}$, putem scrie: $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{m}{n}$

sau:
$$\frac{\sin\alpha}{m} = \frac{\cos\alpha}{n} = \pm\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{m^2+n^2}},$$

de unde:
$$\sin\alpha = \frac{m}{\pm\sqrt{m^2+n^2}} \text{ și } \cos\alpha = \frac{n}{\pm\sqrt{m^2+n^2}}.$$

4. *Știind că* $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{3}$ *și că* α *este un unghi din cadranul* IV, *să se găsească* $\sin\alpha$ *și* $\cos\alpha$.

Soluție. Aplicăm formulele:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}} \text{ și } \cos\alpha = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Calculăm mai întîi $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \pm\sqrt{1+\frac{1}{9}} = \pm\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Înlocuind în formule și ținînd cont că sinusul este negativ și cosinusul este pozitiv în cadranul IV, obținem:

$$\sin\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ și } \cos\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

5. *Fiind dat* $\sin\alpha = \frac{a-b}{a+b}$, *în care* $0 < b < a$, *să se calculeze toate funcțiile trigonometrice ale unghiului* α.

Soluție. a) $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$,

deci $\cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2}$,

deci: $\cos\alpha = \pm\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$;

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, deci $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$;

c) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, deci $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$;

d) $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, deci $\sec\alpha = \pm\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$;

e) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, deci $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{a+b}{a-b}$.

6. *Se dă* $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}4$. *Să se calculeze celelalte funcții trigonometrice,* α *fiind un unghi în cadranul* III.

Soluție. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, deci $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2{,}4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$;

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \text{ deci } \cos\alpha = \frac{1}{-\sqrt{1+(2{,}4)^2}} =$$

$$= \frac{1}{-\sqrt{6{,}76}} = -\frac{1}{2{,}6} = -\frac{5}{13};$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}, \text{ deci } \sin\alpha = \frac{1}{-\sqrt{\frac{169}{144}}} = -\frac{12}{13}.$$

7. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:*

$$E = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - 1}.$$

Soluție. $E = \frac{1-\sin^2\alpha}{-(1-\sin\alpha)} = \frac{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}{-(1-\sin\alpha)} = -(1+\sin\alpha)$.

8. *Să se restrîngă expresiile:*

$$E_1 = \cos^2\alpha\,(\sin^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \cos^2\alpha) \text{ și } E_2 = \sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Soluție. $E_1 = \cos^2\alpha\,(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \cos^2\alpha\cdot\sec^2\alpha = 1$,

$$E_2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha =$$

$$= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$$

9. *Să se arate că expresia:*

$$E = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha\,(1+\cos^2\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha\,(1+\sin^2\alpha)}}\right]$$

este independentă de unghiul α.

Soluție. $1 - \sin^2\alpha\,(1+\cos^2\alpha) = 1 - (1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha) = 1 - (1-\cos^4\alpha) = \cos^4\alpha$,
$1 - \cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha) = \sin^4\alpha$.

Înlocuind, rezultă: $E = \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha}\right) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

deci $E = 1$.

10. *Să se stabilească identitatea:* $\sec^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\alpha = \sec^2\alpha\,\mathrm{cosec}^2\alpha$.

Soluție. Avem:

$$\sec^2\alpha + \mathrm{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$$

și:

$$\sec^2\alpha\cdot\mathrm{cosec}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}$$

11. *Să se demonstreze relația:* $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}^2\alpha = \mathrm{tg}^2\alpha$.

Soluție. Aplicînd formula $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, avem:

$$\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\alpha = \sin^2\alpha + \frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha.$$

12. *Să se verifice identitatea:* $\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

Soluție. Transformînd mai întîi fracția a doua, avem:

$$\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha - 1} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{\cos^2\alpha(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$$

deci:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} - \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

Observație. Analizînd identitatea propusă, observăm că în timp ce membrul drept are sens pentru toate valorile lui α, membrul stîng nu are sens pentru valorile lui α care anulează numitorii celor două fracții. De exemplu, valorile $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$ conduc la operații fără sens.

13. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:*

$$E(\alpha) = \left(\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right).$$

Soluție. Știind că $|\sin\alpha| \leqslant 1$ și $|\cos\alpha| \leqslant 1$, putem aplica regulile de operații cu radicali, expresiile de sub radicali nefiind negative.

Astfel:

$$\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{(1-\sin\alpha) - (1+\sin\alpha)}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = -\frac{2\sin\alpha}{|\cos\alpha|}.$$

Analog: $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} - \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = -\frac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}$.

Rezultă: $E(\alpha) = \frac{4\sin\alpha\cos\alpha}{|\cos\alpha|\,|\sin\alpha|} = 4\,\frac{\sin\alpha}{|\sin\alpha|}\cdot\frac{\cos\alpha}{|\cos\alpha|}$.

Observație. Pentru unghiurile α a căror latură finală se găsește în cadranele **I** sau **II**, avem $\sin\alpha > 0$ și deci $|\sin\alpha| = \sin\alpha$; pentru unghiurile α a căror latură finală se găsește în cadranele **III** sau **IV**, avem $\sin\alpha < 0$ și deci $|\sin\alpha| = -\sin\alpha$.

Pentru unghiurile α a căror latură finală se găsește în cadranele **I** sau **IV**, $|\cos\alpha| = \cos\alpha$, iar pentru cele din cadranele **II** sau **III**, avem $|\cos\alpha| = -\cos\alpha$.

$$E(\alpha) = \begin{cases} 4, \text{ dacă } \alpha \in \left[2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ -4, \text{ dacă } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (2k+1)\pi\right], \\ 4, \text{ dacă } \alpha \in \left[(2k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ -4, \text{ dacă } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad (2k+1)\pi\right]. \end{cases} \quad (k \in Z).$$

B. Aplicații ale formulelor 5—16

14. *Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului* $\alpha = 75°$.

Soluție. Aplicăm formulele (5) și (7):

$$\sin 75° = \sin (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3});$$

$$\cos 75° = \cos (45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (\sqrt{3} - 1);$$

$$\operatorname{tg} 75° = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}; \ \operatorname{ctg} 75° = 2 - \sqrt{3}; \ \sec 75° = \sqrt{6} + \sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} 75° = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

15. *Fiind date* $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ *și* $\cos \beta = \frac{13}{14}$ (α *și* β ***fiind unghiuri ascuțite*** *și pozitive), să se arate că:*

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Soluție. Pentru a aplica formula (8), calculăm mai întîi:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

Înlocuind, obținem: $\cos (\alpha - \beta) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}$.

Pe de altă parte $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, deci $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$. Rezultă: $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$.

16. *Fiind date* $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *și* $\sin \beta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, *se cere* $\sin (\alpha - \beta)$, *precum și expresia generală a unghiului* $\alpha - \beta$.

Soluție. Calculăm mai întîi pe $\cos \alpha$ și $\cos \beta$:

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Aplicăm formula (6): $\sin(\alpha-\beta) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, de unde:

$$\sin(\alpha-\beta) = \begin{cases} \pm\frac{1}{2}, \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Deci, soluţiile ar putea fi: $\alpha - \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$, (1)

$$\alpha - \beta = (2k+1)\pi \mp \frac{\pi}{6}, \quad (2)$$

$$\alpha - \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad (3)$$

$$\alpha - \beta = (2k+1)\pi \mp \frac{\pi}{3}. \quad (4)$$

Ţinînd seama de faptul că în afară de $\alpha - \beta$ cunoaştem şi pe $\sin\alpha$ şi pe $\sin\beta$, numai valorile (1) şi (4) convin problemei. În adevăr, din relaţiile date, găsim:

$$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{4}; \qquad \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{12};$$

$$\alpha = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}; \qquad \beta = 2k\pi + \frac{11\pi}{12}.$$

Făcînd diferenţa $\alpha - \beta$ în toate modurile, constatăm cele afirmate.

17. *Să se calculeze suma* $\alpha + \beta$, *ştiind că:* $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2m-1}{\sqrt{3}}$ *şi* $\operatorname{tg}\beta = \frac{2-m}{m\sqrt{3}}$ $(m \neq 0;\ m \in R)$.

Soluţie. Aplicăm formula (9): $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{2(m^2-m+1)}{m\sqrt{3}} \cdot \frac{3m}{2(m^2-m+1)} = \sqrt{3}$,

deci $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{3}$ $(k \in Z)$.

Observaţie. Trinomul $m^2 - m + 1$ are rădăcini complexe.

18. *Să se demonstreze identitatea:* $\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Soluţie. Aplicînd formulele (7) şi (8) obţinem: $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$.

Deci, membrul stîng devine: $\frac{2\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

Înlocuind tangentele prin sinus şi cosinus, în membrul drept, şi aplicînd formula (5), obţinem:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Observaţie. În membrul stîng la numitor se putea aplica direct formula de transformare a unei sume în produs. De asemenea, şi în membrul drept.

19. *Să se arate că expresia:* $E = \frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta)}$ *nu depinde de unghiul* α.

Soluția 1°. Observăm că: $\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\alpha+\beta) = \sin[(\alpha+\beta)-\alpha] = \sin\beta$, $\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha + \sin\alpha\sin(\alpha+\beta) = \cos[(\alpha+\beta)-\alpha)] = \cos\beta$, deci $E = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$.

Soluția 2°. Se înlocuiesc $\sin(\alpha+\beta)$ și $\cos(\alpha+\beta)$, aplicînd formulele (5) și (7), se efectuează calculele și se ajunge la același rezultat.

Să se verifice identitățile:

20. $\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta = \sin^2\alpha$.

Soluție. Avem:

$\cos^2(\alpha-\beta) + \cos^2\beta - 2\cos(\alpha-\beta)\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)[\cos(\alpha-\beta) - 2\cos\alpha\cos\beta] + \cos^2\beta = -\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) + \cos^2\beta = -(\cos^2\alpha - \sin^2\beta) + \cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

21. $\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta)$.

Soluție. Putem verifica identitatea lucrînd fie numai în membrul stîng, fie numai în membrul drept, fie simultan în ambii membri.

Alegem prima cale:

$\cos(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta = \cos\beta(\cos\alpha + \sin\alpha) + \sin\beta(\cos\alpha + \sin\alpha) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta)$.

22. $\cos\alpha\sin(\beta-\gamma) + \cos\beta\sin(\gamma-\alpha) + \cos\gamma\sin(\alpha-\beta) = 0$.

Soluție. $\cos\alpha(\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma) + \cos\beta(\sin\gamma\cos\alpha - \cos\gamma\sin\alpha) + \cos\gamma(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta) = \cos\alpha\cos\gamma\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha + \cos\beta\cos\gamma\sin\alpha - \gamma\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta = 0$.

23. *Să se calculeze* $\sin(\alpha+\beta-\gamma)$, ***cunoscînd:*** $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Soluția 1°. Notînd $\beta - \gamma = u$, avem succesiv:

$\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin(\alpha+u) = \sin\alpha\cos u + \sin u\cos\alpha = \sin\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma) + \sin(\beta-\gamma)\cos\alpha = \sin\alpha(\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) + (\sin\beta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\beta)\cos\alpha$;

$\sin(\alpha+\beta-\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \sin\beta\cos\alpha\cos\gamma - \sin\gamma\cos\alpha\cos\beta$.

Soluția 2°. Se aplică direct formula (13), ținînd seama că $\sin(-\gamma) = -\sin\gamma$.

Știind că $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, să se verifice identitățile.

24. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

Soluție. Deoarece $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\operatorname{tg}\gamma$.

Aplicînd formula (9), obținem: $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = -\operatorname{tg}\gamma$,

de unde: $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

25. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

Soluția 1°. Condiția dată se poate scrie: $\alpha + \beta = \pi - \gamma$,

deci: $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\pi-\gamma)$,

de unde: $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = -\cos\gamma$.

Izolînd termenul în sinus și ridicînd la pătrat ambii membri ai egalității, obținem succesiv:

$\cos\alpha\cos\beta + \cos\gamma = \sin\alpha\sin\beta$,

$\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos^2\gamma = \sin^2\alpha\sin^2\beta = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta) = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta$.

Și, în definitiv:

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$, c.c.t.d.

Soluția 2°.

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+\cos^2(\alpha+\beta)-[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\cdot\cos(\alpha+\beta)=1+\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)+$$
$$+\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]=1.$$

26. $\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)-[\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma]\cdot[\sin(\alpha+\beta+\gamma)-$ $-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma]=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$.

Soluție. $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin[(\alpha+\beta)+\gamma]=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cdot\sin\beta\sin\gamma$, de unde: $\sin(\alpha+\beta)\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

Înlocuind, obținem: $\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)-[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma][\sin(\alpha+$ $+\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma]=\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)-\sin^2(\alpha+\beta+\gamma)+\sin^2\alpha\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma=$ $=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma$.

C. Aplicații ale formulelor 17—34

27. *Știind că* $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ *și* $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, *să se calculeze:* $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ și $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Soluție. Aplicăm formulele (17), (18), (19):

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\ \operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Avînd nevoie de $\cos\alpha$ și $\operatorname{tg}\alpha$, le deducem cu ajutorul formulelor (1) și (2):

$$\cos\alpha=\frac{3}{5}\text{ și }\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}.$$

Și, în definitiv, obținem: $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$; $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$; $\operatorname{tg}2\alpha=-\frac{24}{7}$.

28. *Să se găsească* $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ *și* $\operatorname{tg}\alpha$, *știind că:* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1$.

Soluție. Aplicăm formulele (29,) (30) și (31): $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=1.$$

29. *Să se calculeze* $\sin 15°$, $\cos 15°$ *și* $\operatorname{tg} 15°$, *știind că:* $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Aplicăm formulele (25), (26) și (27): $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

Observaţie. În faţa radicalilor s-a luat semnul $+$, deoarece $\frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

30. *Ştiind că* $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, *să se calculeze* $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Soluţie. Notăm $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x$. Aplicăm formula (29): $\sin \alpha = \frac{2x}{1 + x^2}$ sau $x^2 \sin \alpha - 2x + \sin \alpha = 0$,

de unde:
$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Dar: $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$, deci: $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} = \begin{cases} \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Observaţie. Deoarece $1 - \sin^2 \alpha \geqslant 0$, rădăcinile sînt totdeauna reale.

31. *Ştiind că* $\cos \alpha = \frac{1}{9}$ *şi că* $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, *să se calculeze:* $\sin \frac{\alpha}{2}$ şi $\cos \frac{\alpha}{2}$.

Soluţie. Observăm că $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, deci: $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ şi $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$.

Aplicăm formulele (25) şi (26): $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2}{3}$ şi $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

32. *Fiind dat* $\operatorname{tg} \alpha = 3$, *să se calculeze* $\sin 4\alpha$.

Soluţie. Ştiind că: $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$; $\cos \alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$; $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$,

deducem:
$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{4 \operatorname{tg}\alpha(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2}.$$

Înlocuind, obţinem:
$$\sin 4\alpha = -\frac{24}{25}.$$

33. *Ştiind că* $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$, *să se calculeze expresia:* $E = m \sin 2\alpha + n \cos 2\alpha$.

Soluţie. $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ şi $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$. Înlocuind în E, obţinem:

$$E = m \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + n \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = m \frac{\frac{2m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} + n \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}},$$

$$E = \frac{2m^2 n}{m^2 + n^2} + \frac{n(n^2 - m^2)}{m^2 + n^2} = n.$$

34. *Să se exprime* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ *în funcţie de* $\operatorname{tg}\alpha$ *şi să se discute formula obţinută după cum unghiul* α *este situat în unul din cele patru cadrane.*

Soluţie. Aplicăm formula (10): $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\dfrac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Din formula (31): $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, rezultă: $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha=0$, deci:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Ţinînd seama de aceste valori, avem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1-\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}}{1+\dfrac{-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+1\mp\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha-1\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Raţionalizînd numitorul, obţinem: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

Discuţie. Vom lua: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha$,

dacă latura finală a unghiului α este în cadranul I sau III şi $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=-\operatorname{tg}\alpha-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, dacă latura finală a unghiului α este în cadranul II sau IV.

35. *Ştiind că* $\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{7}{5}$ *şi că* $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, *să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Soluţie. Notînd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$, avem: $\sin\alpha=\dfrac{2m}{1+m^2}$ şi $\cos\alpha=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}$.

Înlocuind în relaţia dată, obţinem: $6m^2-5m+1=0$, de unde: $m_1=\frac{1}{3}$ şi $m_2=\frac{1}{2}$.

Rezultă pentru $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ două valori. O vom alege pe aceea pentru care $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ sau

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\in(0,\operatorname{tg}22°30')$. Aplicînd formula (27), găsim: $\operatorname{tg}22°30'=\sqrt{\dfrac{1-\cos45°}{1+\cos45°}}=$

$$=\sqrt{2}-1\approx0{,}414.$$

Dar $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}=0{,}333\ldots \text{ şi } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Comparînd rezultatele obţinute, reţinem: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$.

36. *Fiind dată valoarea lui* $\sin\alpha$, *se cer funcţiile trigonometrice ale unghiului* $\frac{\alpha}{2}$.

Soluție. Avem:
$$2 \sin\beta \cos\beta = \sin 2\beta,$$
$$\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1.$$

Adunînd sau scăzînd aceste relații, obținem: $\cos^2\beta + \sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta = 1 + \sin 2\beta.$

și:
$$\cos^2\beta + \sin^2\beta - 2\sin\beta\cos\beta = 1 - \sin 2\beta.$$

sau:
$$(\cos\beta + \sin\beta)^2 = 1 + \sin 2\beta,$$

de unde:
$$(\cos\beta - \sin\beta)^2 = 1 - \sin 2\beta,$$
$$\cos\beta + \sin\beta = \pm\sqrt{1 + \sin 2\beta},$$
$$\cos\beta - \sin\beta = \pm\sqrt{1 - \sin 2\beta}.$$

Luînd: $\beta = \frac{\alpha}{2}$, avem:
$$\begin{cases} \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin\alpha}, \\ \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 - \sin\alpha}. \end{cases} \tag{1}$$

Adunînd și scăzînd aceste relații, obținem formulele:
$$2\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin\alpha} \pm \sqrt{1 - \sin\alpha};$$
$$2\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{1 + \sin\alpha} \mp \sqrt{1 - \sin\alpha}, \tag{2}$$

care ne dau valorile lui $\cos\frac{\alpha}{2}$ și $\sin\frac{\alpha}{2}$, cînd se cunoaște $\sin\alpha$.

Notă. Semnele din fața radicalilor se iau în felul următor: se observă cum stau, una față de cealaltă funcțiile $\cos\frac{\alpha}{2}$ și $\sin\frac{\alpha}{2}$ și se iau în fața radicalilor $\sqrt{1 + \sin\alpha}$ și $\sqrt{1 - \sin\alpha}$, semnele ce le au expresiile $\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}$ și $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$, relațiile (1).

Exemple. a) Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului 15°, știind că $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

Soluție. Observăm că $\sin 15° < \cos 15°$, amîndouă fiind pozitive; deci: $\cos 15° + \sin 15° > 0$ și $\cos 15° - \sin 15° > 0$.

Trebuie deci ca în relațiile (1), în fața radicalilor să luăm semnul +.

Astfel:
$$\cos 15° + \sin 15° = \sqrt{1 + \sin 30°} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}},$$
$$\cos 15° - \sin 15° = \sqrt{1 - \sin 30°} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}},$$

de unde:
$$\cos 15° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$$

și:
$$\sin 15° = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

b) Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului 175°, cînd se cunoaște sin 350°.

Soluție. Unghiul de 175° este în cadranul II. Deci:

$\sin 175° > 0$ și $\cos 175° < 0$, iar $|\cos 175°| > |\sin 175°|$.

Rezultă: $\cos 175° + \sin 175° < 0$ și $\cos 175° - \sin 175° < 0$.

Astfel, în formulele (1) vom lua în fața radicalilor semnul —.

Avem: $\cos 175° + \sin 175° = -\sqrt{1 + \sin 350°}$,

$\cos 175° - \sin 175° = -\sqrt{1 - \sin 350°}$,

de unde: $2 \cos 175° = -\sqrt{1 + \sin 350°} - \sqrt{1 - \sin 350°}$,

$2 \sin 175° = -\sqrt{1 + \sin 350°} + \sqrt{1 - \sin 350°}$ etc.

37. *Fiind dat* $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$, *să se găsească* $\sin \alpha$ *şi* $\cos \alpha$. *Să se explice rezultatul.*

Soluţie. $\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \frac{576}{49}}} = \pm\frac{7}{25}$,

$$\sin \alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \text{ şi } \cos \alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

Pentru $\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ obţinem $\sin \alpha = \pm\frac{3}{5}$ şi $\cos \alpha = \pm\frac{4}{5}$;

pentru $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$ obţinem: $\sin \alpha = \pm\frac{4}{5}$ şi $\cos \alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Discuţie. Fie a cel mai mic unghi pozitiv a cărui tangentă este egală cu $-\frac{24}{7}$; celelalte sînt date de relaţia $2\alpha = k\pi + a$.

Deci: $\sin \alpha = \sin \frac{1}{2}(k\pi + a)$ şi $\cos \alpha = \cos \frac{1}{2}(k\pi + a)$.

Toate valorile acestor două expresii se obţin dînd lui k valorile: 0, 1, 2, 3.

Găsim pentru $\sin \alpha$ valorile: $\sin \frac{a}{2}$; $\cos \frac{a}{2}$; $-\sin \frac{a}{2}$; $-\cos \frac{a}{2}$,

iar pentru $\cos \alpha$ valorile: $\cos \frac{a}{2}$; $-\sin \frac{a}{2}$; $-\cos \frac{a}{2}$; $\sin \frac{a}{2}$.

38. *Să se verifice identitatea:* $\sin 2\alpha = (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$.

Soluţie. Aplicăm formula $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2\alpha$. Avem:

$$(1 - \cos 2\alpha)\operatorname{ctg} \alpha = 2 \sin^2\alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

39. *Să se verifice identitatea:* $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos^2\alpha} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Soluţie. Avem:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

40. *Să se verifice identitatea:* $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$.

Soluţie. Avem: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} =$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2\,\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha.$$

41. *Să se verifice identitatea:* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \cos 2\alpha.$

Soluție. Aplicînd formula (19), avem:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{1}{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \cos 2\alpha.$$

42. *Să se verifice identitatea:* $\dfrac{\operatorname{cosec}^2\alpha - \sec^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)} = \cos 2\alpha.$

Soluție. Aplicînd formulele (4) și înlocuind în membrul stîng, obținem:

$$\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)} = \frac{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}} = \frac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \cos 2\alpha.$$

43. *Să se verifice identitatea:* $\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$

Soluție. Avem: $(\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha) - \operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha =$

$$= \frac{\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\cos 3\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\cos 3\alpha\cos\alpha} - \operatorname{tg}2\alpha =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha\cos\alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 3\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{\sin 2\alpha[\cos(3\alpha-\alpha) - \cos 3\alpha\cos\alpha]}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos 3\alpha\cos\alpha + \sin 3\alpha\sin\alpha - \cos 3\alpha\cos\alpha)}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha}{\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 3\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha.$$

44. *Să se verifice identitatea:* $\sin 3\alpha\sin^3\alpha + \cos 3\alpha\cos^3\alpha = \cos^3 2\alpha.$

Soluție. Notăm membrul stîng cu A și aplicăm formulele:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \text{ și } \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha:$$

$A = 4(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha),$

$A = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)[4(\cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha) - 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)],$

$A = \cos 2\alpha\{4[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha] - 3\},$

$A = \cos 2\alpha(1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha) = \cos 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha).$

$A = \cos^3 2\alpha.$

45. *Să se verifice identitatea:* $\dfrac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^4\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{2+\operatorname{tg}^2 2\alpha}.$

Soluție. Eliminăm numitorii și grupăm convenabil termenii:
$4\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 2\alpha = \operatorname{tg}^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha\cdot\operatorname{tg}^4\alpha$, $\operatorname{tg}^2 2\alpha(1 - 2\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha) = 4\operatorname{tg}^2\alpha$ sau: $\operatorname{tg}^2 2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)^2 = 4\operatorname{tg}^2\alpha$, de unde: $\operatorname{tg}^2 2\alpha = \left(\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2$, adică tocmai o formulă cunoscută (19).

Observație. Urmînd calea inversă, stabilim identitatea propusă.

46. *Să se verifice identitatea:* $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 2\dfrac{3+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}$.

Soluția 1°. Știm că: $2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 2$.

Adunînd membru cu membru cele două egalități, obținem: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 =$

$$= 2\left(1 + \frac{3+\cos 4\alpha}{1-\cos 4\alpha}\right)$$

sau: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \dfrac{8}{1-\cos 4\alpha}$. Dar: $\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha$. Înlocuind,

avem: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \dfrac{4}{\sin^2 2\alpha}$, sau: $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \left(\dfrac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2$.

Dar: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ și $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Înlocuind, obținem: $\left(\dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2$ și, în definitiv:

$$\left(\frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sin 2\alpha}\right)^2 \text{ egalitate evidentă.}$$

Soluția 2°. Știm că: $\cos 4\alpha = 1 - 2\sin^2 2\alpha = 1 - \dfrac{8\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}$.

Înlocuind în membrul drept al egalității, obținem:

$$2.\ \frac{4 - \dfrac{8\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}}{\dfrac{8\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}} = \frac{1+\operatorname{tg}^4\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha,$$

rezultat identic cu membrul stîng.

47. *Să se arate că expresia:*

$$E = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}$$

nu depinde de α.

Soluție. Aplicînd formula: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$, rezultă:

$$E = \frac{\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}{1 + \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - (1-\cos\alpha)(1-\sin\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha) + \cos\alpha(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - 1}{\sin\alpha + \cos\alpha - 1} = 1.$$

D. Aplicații ale formulelor 35—63

48. *Să se calculeze trigonometric expresia:* $E = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Soluție. Se știe că $\sqrt{2} = 2\sin 45°$ și $\sqrt{3} = 2\sin 60°$, deci: $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2(\sin 45° + \sin 60°)$.

Aplicînd formula (35), avem: $E = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 4 \sin \frac{105°}{2} \cos \frac{15°}{2}$.

49. *Să se transforme în produs expresia:* $E = \sin 75° - \sin 15°$.

Soluţie. Aplicînd formula (36), avem: $E = 2 \sin \frac{75° - 15°}{2} \cos \frac{75° + 15°}{2} = 2 \sin 30° \cos 45°$,

Deci: $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

50. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:* $E = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$.

Soluţie. Aplicînd în paranteze formulele (35) şi (37), avem:

$$E = \left(2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \left(2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 =$$

$$= 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}\right).$$

Rezultă: $E = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$.

51. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:* $E = \sin^2 (\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)$.

Soluţie. Se observă că: $E = [\sin(\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)] [\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)]$.
Aplicînd formulele (45) şi (45'), avem: $E = 2 \sin \alpha \cos \beta \cdot 2 \cos \alpha \sin \beta$.
Rezultă: $E = \sin 2\alpha \sin 2\beta$.

52. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:* $E = \frac{\sin^2 7\alpha - \sin^2 4\alpha}{\cos^2 5\alpha - \cos^2 6\alpha}$.

Soluţie. Descompunînd în factori şi aplicînd formulele (35), (36), (37), (38), avem:

$$E = \frac{(\sin 7\alpha + \sin 4\alpha) (\sin 7\alpha - \sin 4\alpha)}{(\cos 5\alpha + \cos 6\alpha) (\cos 5\alpha - \cos 6\alpha)} =$$

$$= \frac{2 \sin \frac{11 \alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{11 \alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{11 \alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{11 \alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = 3 - 4 \sin^2 \alpha.$$

Deci: $E = 4 \cos^2 \alpha - 1$.

53. *Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:*

$$E = 4 \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\pi + \alpha}{3} \sin \frac{\pi - \alpha}{3}.$$

Soluţia 1°. Se observă că, aplicînd formula (47), avem:

$$2 \sin \frac{\pi + \alpha}{3} \sin \frac{\pi - \alpha}{3} = \cos \frac{2\alpha}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2}.$$

Deci: $$E = 2 \sin \frac{\alpha}{3}\left(\cos \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2 \sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{2\alpha}{3} + \sin \frac{\alpha}{3}.$$

Aplicînd formula (45), obţinem: $E = \sin\alpha - \sin\frac{\alpha}{3} + \sin\frac{\alpha}{3} = \sin\alpha$.

Soluţia 2°. Se observă că $\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3} = \sin\frac{\pi+\alpha}{3}\sin\frac{\pi-\alpha}{3}$.

Deci: $E = 4\sin\frac{\alpha}{3}\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin^2\frac{\alpha}{3}\right) = 3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3}$.

Ştim însă că $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Rezultă: $3\sin\frac{\alpha}{3} - 4\sin^3\frac{\alpha}{3} = \sin\alpha$.

54. *Să se arate că expresia:*

$$E = \frac{\sin\beta\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{1 - \cos(\alpha+\beta)} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

este independentă de α *şi* β.

Soluţie. $\frac{\sin\beta\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)}{1-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\beta\cos\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} =$

$$= \frac{\sin\beta\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\beta} = \frac{\sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}.$$

Deci: $E = \frac{\sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta} + \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\beta\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$.

Deoarece $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right)$.

avem: $E = \frac{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \beta\right) + \sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta} =$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta - \sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\beta\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}$$

Rezultă: $E = 1$.

55. *Să se transforme în produs expresia:* $E = m + n\operatorname{tg}\alpha$.

Soluţie. $E = n\left(\frac{m}{n} + \operatorname{tg}\alpha\right)$. Notînd $\frac{m}{n} = \operatorname{tg}\beta$ şi înlocuind obţinem:

$$E = n\,(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) = \frac{n\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = n\sec\alpha\sec\beta\sin(\alpha+\beta).$$

56. *Să se transforme în produs expresia:* $E = m + n \sin\alpha$.

Soluție. $E = n\left(\dfrac{m}{n\cos\alpha}\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\right)$.

Notînd $\dfrac{m}{n\cos\alpha} = \operatorname{tg}\beta$ și înlocuind, obținem: $E = n(\cos\alpha\operatorname{tg}\beta + \sin\alpha) = n\left(\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta} + \sin\alpha\right)$.

Deci: $E = \dfrac{n\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = n\sec\beta\sin(\alpha+\beta)$.

57. *Să se transforme în produs expresia:* $E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$.

Soluție. Aplicînd formula (35), avem: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$,

iar $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Deci: $E = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left[\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$.

În sfîrșit, aplicînd formula (37), obținem: $E = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$.

58. *Să se transforme în produs sau în cît expresia:* $E = 1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha$.

Soluția 1°. Se știe că: $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ și deci, $E = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha =$ $= \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha) = 2\cos\alpha\left(\dfrac{1}{2} + \cos\alpha\right)$.

Dar
$$\frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3},$$
deci:
$$E = 2\cos\alpha\left(\cos\frac{\pi}{3} + \cos\alpha\right).$$

Aplicînd formula (37), obținem: $E = 4\cos\alpha\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Soluția 2°. Am văzut că: $E = \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)$. Dar $2\cos\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$,

deci: $1 + 2\cos\alpha = \dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$. Aplicînd formula (35), obținem:

$$1 + 2\cos\alpha = \frac{2\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\quad \text{Rezultă: } E = \frac{\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

59. *Presupunînd că* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, *să se transforme în produs expresia:* $E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

Soluție. Deoarece $\gamma = \pi - (\alpha+\beta)$, avem: $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$.

Deci: $E = \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta)$.

Se obține: $E = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$ (v. aplicația 57).

Observînd că $\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos\dfrac{\gamma}{2}$, avem: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

60. *Să se transforme în produs expresia:* $E = 1 + \sin\alpha + \cos\alpha$.

Soluţie.

Înlocuind $1 = \sin\frac{\pi}{2}$ şi $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ avem: $E = \sin\frac{\pi}{2} + \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Observăm că: $\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$.

Rezultă că putem aplica relaţia:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \text{ (v. aplicaţia 59).}$$

Deci: $1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 4\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

61. *Să se verifice identitatea:* $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$, *ştiind că* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, *iar* $n = 2k + 1$ $(k \in Z)$.

Soluţie. $\sin n\alpha + \sin n\beta = 2\sin\frac{n(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{n(\alpha-\beta)}{2} = 2\sin\frac{n(\pi-\gamma)}{2}\cos\frac{n(\alpha-\beta)}{2} =$

$$= 2\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\gamma}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\gamma}{2}\right]\cos\frac{n(\alpha-\beta)}{2} = 2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}\cos\frac{n(\alpha-\beta)}{2}.$$

Deoarece, conform condiţiei, $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$, găsim:

$$\sin n\gamma = 2\sin\frac{n\gamma}{2}\cos\frac{n\gamma}{2} = 2\sin\frac{n(\pi-\alpha-\beta)}{2}\cos\frac{n\gamma}{2} =$$

$$= 2\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n(\alpha+\beta)}{2}\right]\cos\frac{n\gamma}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}.$$

Revenind: $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 2\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}\left[\cos\frac{n(\alpha-\beta)}{2} + \cos\frac{n(\alpha+\beta)}{2}\right]$.

Aplicînd formula (37), obţinem: $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 4\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$, adică c.c.t.d.

62. *Să se transforme în produs expresia:* $E = \sin\alpha + \cos\alpha + \sin\beta + \cos\beta + 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Soluţie. Aplicînd formulele (35) şi (37), avem:

$$E = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 1\right].$$

Notăm: $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ şi $1 = \sin\frac{\pi}{2}$.

Deci: $E = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2}\right]$.

Observăm că în paranteză suma argumentelor este π:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Deci, putem aplica relaţia: $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

Rezultă: $E = 8\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\pi-\alpha-\beta}{4}\cos\frac{\pi}{4} =$

$$= 4\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\pi-(\alpha+\beta)}{4}.$$

63. *Să se transforme în produs suma:* $S = \cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma)$.

Soluţie. Aplicînd formula (37), avem: $\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) = 2\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma$, $\cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(-\alpha+\beta+\gamma) = 2\cos(\alpha-\beta)\cos\gamma$.
Deci: $S = 2\cos\gamma\,[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$.
Aplicînd formula (46), obţinem: $S = 4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

64. *Să se verifice identitatea:*

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} + \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)} = \frac{2}{\sin 2\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta}.$$

Soluţie. Aplicînd formulele (35), (35′), (36), (37), membrul stîng al egalităţii devine:

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} + \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}\beta}\cdot\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} =$$

$$= \frac{2}{\sin 2\alpha\ \mathrm{tg}\,\beta},$$ adică c.c.t.d.

65. *Să se transforme în produs suma de sinusuri a n unghiuri în progresie aritmetică, adică:*

$$S = \sin\alpha + \sin(\alpha+h) + \sin(\alpha+2h) + \ldots + \sin[\alpha+(n-1)h].$$

Soluţie. Înmulţind cu $2\sin\frac{h}{2}$ ambii membri ai sumei, avem:

$$2S\sin\frac{h}{2} = 2\sin\alpha\sin\frac{h}{2} + 2\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2} + \ldots + 2\sin[\alpha+(n-1)h]\sin\frac{h}{2}.$$

Dar fiecare produs de două sinusuri se poate înlocui prin diferenţa a două cosinusuri, aplicînd formula 47. Deci:

$$2\sin\alpha\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right),$$

$$2\sin(\alpha+2h)\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right) - \cos\left(\alpha+\frac{5h}{2}\right).$$

....

$$2\sin[\alpha+(n-1)h]\sin\frac{h}{2} = \cos\left[\alpha+\frac{(2n-3)h}{2}\right] - \cos\left[\alpha+\frac{(2n-1)h}{2}\right].$$

Adunînd membru cu membru, obţinem: $2S\sin\frac{h}{2} = \cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right) - \cos\left[\alpha + \frac{(2n-1)h}{2}\right] = 2\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}$.

Rezultă:

$$S = \frac{\sin\left[\alpha+\frac{(n-1)h}{2}\right]\cdot\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$$

66. *Știind că:* $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ *și* $\operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2}$, *unde* $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, *să se calculeze* $\cos(\alpha - \beta)$.

Soluție. Știm că $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.
Dar:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\sqrt{1+\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Înlocuind, obținem: $\cos(\alpha-\beta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1.$

Observație. Rezultă: $\alpha - \beta = 0$, deci $\alpha = \beta$.

67. *Știind că* $\sin\alpha + \cos\alpha = t$, *să se calculeze expresia:* $E = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ *în funcție de* t.

Soluție. $E = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = t(1 - \sin\alpha\cos\alpha)$.
Dar: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = t^2$,
de unde: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$.

Rezultă: $E = \frac{t}{2}(3 - t^2)$.

68. *Știind că* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, *să se verifice identitatea:*

$$\frac{\cos\beta + \cos\gamma - \sin\alpha}{\cos\gamma + \cos\alpha - \sin\beta} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Soluție. $\cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$,

deci: $\cos\beta + \cos\gamma - \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \right.$
$\left. - \cos\frac{\alpha}{2}\right) = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{\beta-\gamma+\alpha}{4} = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$

Procedînd analog și la numitor, obținem:

$$\cos\gamma + \cos\alpha - \sin\beta = 4\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

În definitiv, înlocuind, obținem:

$$\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{4\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

69. *Să se verifice identitatea:* $\frac{\sin\alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

Soluţie. Ştim că: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ şi $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Înlocuind în membrul stîng, obţinem succesiv:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(2\beta - \alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)} = \frac{\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - \sin\beta} = \frac{(\cos\beta + \sin\beta)^2}{\cos^2\beta - \sin^2\beta} = \frac{1 + 2\sin\beta\cos\beta}{\cos 2\beta} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta},$$ c.c.t.d

70. *Ştiind că* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, *să se verifice identitatea:*

$$\frac{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Soluţie. $2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta) = \frac{2\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha\sin\beta} = \frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$,

iar: $\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2 = \frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}$.

Rezultă: $\frac{2(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)^2} = \frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}} =$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

deoarece: $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$ şi $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$.

71. *Să se arate că, dacă* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ *şi dacă avem relaţia:* $\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\gamma) = \sin\beta$,

avem şi relaţia: $3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 1$.

Soluţie. $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2} = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

sau: $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$,

deci: $\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$, deoarece $\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\neq 0$

sau: $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Rezultă: $3\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

şi, în definitiv: $3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=1$.

72. *Să se arate că, dacă avem* $\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta=1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta$, *atunci există şi relaţia:* $\sin\alpha\sin\beta=\pm\sin\frac{\pi}{4}$.

Soluţie. Înlocuind tangentele în funcţie de sinus şi cosinus, obţinem:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta},$$

de unde: $\sin^2\alpha\sin^2\beta=\cos^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cos^2\beta+\sin^2\beta\cos^2\alpha=\cos^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+$ $+\sin^2\beta\cos^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha)=1-\sin^2\alpha\sin^2\beta$.

Rezultă: $2\sin^2\alpha\sin^2\beta=1$

sau: $\sin\alpha\sin\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\sin\frac{\pi}{4}$.

73. *Să se demonstreze inegalitatea:* $\left|\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|\leqslant\sqrt{2}$.

Soluţie. Aplicînd relaţiile: $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, $1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ etc., obţinem:

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\cos\alpha+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Dar: $\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|\leqslant 1$.

Rezultă: $\left|\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\right|=\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, c.c.t.d.

74. *Să se arate că, dacă* $0<\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$, *atunci:* $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\geqslant 1+\operatorname{ctg}\varphi$.

Soluţie. Exprimînd $\operatorname{ctg}\varphi$ prin $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$, inegalitatea devine: $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\geqslant 1+\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}}$

sau, ţinînd seama că $2\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}>0$: $\left(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}-1\right)^2\geqslant 0$, ceea ce este evident.

Egalitatea are loc pentru $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}=1$, deci $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

75. *Să se demonstreze inegalitatea:* $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geqslant \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}$.

Soluție. Inegalitatea se poate scrie sub forma echivalentă: $-\frac{1}{(3 - \sin x)(\sin x - 2)} \leqslant \frac{1}{2}$

sau: $$\frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Însă: $$3 - \sin x \geqslant 2; \; 2 - \sin x \geqslant 1.$$

Prin urmare: $$\frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}.$$

76. *Să se arate că funcția:* $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$ *ia valori pozitive pentru toate valorile lui x admisibile.*

Soluție. Ținînd seama că $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq -1$, adică $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$, atunci:

$$f(x) = \frac{\sin x\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x\left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}.$$

Fiindcă pentru $x \neq k\frac{\pi}{2}$ avem: $1 + \cos x > 0$; $1 + \sin x > 0$, rezultă că $f(x) > 0$.

77. *Să se demonstreze inegalitatea:* $(3 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha)\, x^2 - 2x(\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 \geqslant 0$, *unde* α *și* x *sînt numere reale arbitrare.*

Soluție. Notînd cu Δ realizantul ecuației, obținem:

$\Delta = 4[(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - (3 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha)] = 8(\sin\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$, deci $\Delta \leqslant 0$.

Pe de altă parte, $3 + 2\cos\alpha - 2\sin\alpha = 3 + 2\left[\cos\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] =$

$$= 3 - 2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \geqslant 3 - 2\sqrt{2} > 0,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea.

Cînd $\Delta = 0$, egalitatea se obține pentru $\sin\alpha = 1$, adică pentru

$$\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ și } x = 1$$

sau pentru $\cos\alpha = -1$, adică pentru $\alpha = (2k + 1)\pi$ și $x = -1$ $(k \in Z)$.

78. *Să se demonstreze că, dacă* $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, *atunci:*

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 8. \qquad (1)$$

Soluție. Transformăm membrul stîng al inegalității date în felul următor:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} = \frac{1}{\sin^2 x(1 - \operatorname{tg} x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x(1 - \operatorname{tg} x)} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x)}.$$

Dacă facem substituţia $\operatorname{tg} x = t$, atunci inegalitatea (1) devine:

$$\frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 8 \ (0 < t < 1). \text{ Însă: } \frac{1+t^2}{t} > 2,$$

$$\text{iar: } t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}.$$

Prin urmare: $\frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 2 \cdot 4 = 8$, c.c.t.d.

79. *Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n,$$

ştiind că: $$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie. Pe intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ funcţia sinus este strict crescătoare, iar funcţia cosinus, strict descrescătoare.

Astfel: $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 < \ldots < \sin \alpha_n$ şi: $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \ldots > \cos \alpha_n$.

Prin urmare:

$$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} > \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 + \ldots + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} >$$

$$> \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 + \ldots + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_1} = \frac{n \sin \alpha_1}{n \cos \alpha_1} = \operatorname{tg} \alpha_1$$

şi: $$\frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \ldots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \frac{n \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \ldots + \cos \alpha_n} < \frac{n \sin \alpha_n}{n \cos \alpha_n} = \operatorname{tg} \alpha_n.$$

80. *Să se demonstreze că pentru orice unghi $\alpha \in (0, \pi)$ există relaţia:*

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > 0.$$

Soluţie. $\sin 3\alpha = \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha$.

Înlocuind, membrul stîng al inegalităţii devine: $\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{3} (4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{3} (4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha) = \frac{1}{3} \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) =$

$$= \frac{1}{3} \sin \alpha \left[\left(2 \cos \alpha + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{23}{16}\right] > 0.$$

81. *Ştiind că $A + B + C = \pi$, să se demonstreze inegalitatea:*

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leqslant 1.$$

Soluţie. Înlocuind $A = \pi - 2\alpha$, $B = \pi - 2\beta$ şi $C = \pi - 2\gamma$, în care $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, obţinem:

$$8 \sin \frac{\pi - 2\alpha}{2} \sin \frac{\pi - 2\beta}{2} \sin \frac{\pi - 2\gamma}{2} \leqslant 1$$

sau: $1 - 8 \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) \geqslant 0$, deci: $1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geqslant 0$.

Din relaţia de condiţie $\cos \gamma = - \cos (\alpha + \beta)$ şi deci:

$$1 + 8 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta) \geqslant 0.$$

Dar: $1 = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta)$ şi $\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$.

Rezultă:

$\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + 4[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]\cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + 4\cos^2(\alpha + \beta) + 4\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) + [\cos(\alpha - \beta) + 2\cos(\alpha + \beta)]^2 \geqslant 0$, c.c.t.d.

Demonstraţia inegalităţii propuse cînd A, B, C sînt unghiurile unui triunghi.

Soluţia 1°. Aplicăm relaţia cunoscută: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, de unde: $8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 2$.

Deci trebuie să demonstrăm că: $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

Înlocuind prin relaţiile: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

obţinem: $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leqslant \frac{3}{2}$,

de unde: $ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c) - a^3 - b^3 - a^3 \leqslant 3ab$. (1)

Ştim că $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$.

Înlocuind în această egalitate pe $a^2 + b^2$ cu o cantitate mai mică $2ab$, obţinem inegalitatea:

$$a^3 + b^3 \geqslant (a + b)ab.$$

Analog: $a^3 + c^3 \geqslant (a + c)ac$ şi $b^3 + c^3 \geqslant (b + c)bc$.

Adunînd aceste trei inegalităţi, membru cu membru, se obţine:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + ac(a + c) + bc(b + c). \quad (2)$$

Ştim, de asemenea, că: $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$

şi: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$, de unde obţinem: $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$. (3)

Şi, în definitiv, din (2) şi (3), obţinem (1), adică c.c.t.d.

Soluţia 2°. Dacă suma a trei unghiuri $A + B + C = \pi$, cel puţin unul din ele, de exemplu

$$A \leqslant \frac{\pi}{3}. \text{ Astfel: } 0 < \frac{A}{2} \leqslant 30°, \text{ de unde: } \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Rezultă: $60° \leqslant \frac{B}{2} + \frac{C}{2} < 90°$, deci: $\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}$.

Deoarece $\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) \leqslant 1$, avem: $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)\right] \leqslant \frac{1}{4}$,

de unde:
$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{4}. \quad (2)$$

Înmulţind membru cu membru (1) cu (2), obţinem: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

Soluţia 3°. Se ştie că: $2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc}$.

Deoarece $(b - c)^2 \geqslant 0$, rezultă $2\sin^2\frac{A}{2} \leqslant \frac{a^2}{2bc}$, de unde: $0 < \sin\frac{A}{2} < \frac{a}{2\sqrt{bc}}$; analog:

$$0 < \sin\frac{B}{2} \leqslant \frac{b}{2\sqrt{ac}} \text{ şi } 0 < \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Şi, în definitiv, prin înmulţire se obţine: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{1}{8}$.

A. *Aplicaţii ale formulelor* 1—4.

Să se găsească funcţiile trigonometrice ale unghiului α, ştiind că:

1. $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.
2. $\sin\alpha = -\frac{3}{10}$.
3. $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.
4. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.
5. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{8}$.
6. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{9}{40}$
7. $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{6}$.
8. $\operatorname{ctg}\alpha = -3$.
9. $\sec\alpha = 3$.

10. Ştiind că $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, să se afle $\cos\alpha$.

11. Cunoscînd că $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, să se afle $\operatorname{tg}\alpha$.

12. Se dă $\operatorname{tg}\alpha = 2-\sqrt{3}$; să se afle $\sin\alpha$.

13. Ştiind că $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ şi că $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, să se afle $\operatorname{tg}\alpha$.

14. Cunoscînd că $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ şi că $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, să se afle $\operatorname{ctg}\alpha$.

15. Ştiind că α este un unghi ascuţit pozitiv şi că $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{5}$, să se afle $\sin\alpha$ şi $\sec\alpha$.

16. Fiind dat $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$, să se arate că $\sin\alpha = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$.

Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

17. $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

18. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

19. *a)* $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; *b)* $\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}$.

20. $(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\cos^2\alpha$.

21. $\sin^2\alpha\cdot\sec^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

22. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$.

23. $\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$.

24. $\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

25. *a)* $E_1 = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$;

b) $E_2 = \frac{2}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(\sec^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha)} - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cosec}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

26. *a)* $\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$;

b) $\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)^2$.

Să se verifice identităţile:

27. $\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$.

28 $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha = \sin^2\alpha-\cos^2\alpha$.

29. $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2 = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$.

30. $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+$
$+2\sin\alpha\cos\alpha = \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

31. $\frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{\text{ctg}\,\alpha + \text{ctg}\,\beta} = \text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta.$

32. $\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta} = \text{ctg}^2\alpha\,\text{ctg}^2\beta - 1.$

33. $\frac{\cos\alpha + \sec\alpha}{\cos\alpha - \sec\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + 1}{\cos^2\alpha - 1}.$

34. $\frac{1 + \text{tg}^4\alpha}{\text{tg}^2\alpha + \text{ctg}^2\alpha} = \text{tg}^2\alpha.$

35. $\text{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \sin^4\alpha\cdot\sec^2\alpha$

36. $\frac{1 - \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} : \frac{1 + \sec\alpha}{1 + \text{cosec}\,\alpha} = \text{ctg}^3\,\alpha.$

37. *a)* $\sin\alpha\,(1 + \text{tg}\,\alpha) + \cos\alpha\,(1 + \text{ctg}\,\alpha) = \sec\alpha + \text{cosec}\,\alpha;$

b) $1 - (\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha;$

c) $\frac{\sin(2\alpha + \beta)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\alpha + 2\beta)}{\sin\beta} - 4\cos(\alpha + \beta) = \text{cosec}\,\alpha\,\text{cosec}\,\beta(\sin^2\alpha + \sin^2\beta);$

d) $\frac{\sin^3\alpha\cos\alpha + \sin^3\beta\cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \cos(\alpha - \beta)\,(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - \sin\alpha\sin\beta.$

Să se arate că expresiile 38—42 nu depind de α.

38. $\sec^2\alpha - \text{tg}^2\alpha.$

39. $\frac{\sin^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} + \frac{\cos^2\alpha}{\text{cosec}^2\alpha - 1}.$

40. $\frac{1 + \sin^2\alpha}{2 + \text{ctg}^2\alpha} + \frac{1 + \cos^2\alpha}{2 + \text{tg}^2\alpha}.$

41. $3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha).$

42. $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha - 2(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2.$

43. Să se exprime în funcţie de tg α şi ctg α expresia: $E = \frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}.$

44. Să se exprime expresia:

$$E(\alpha) = \text{cosec}\,\alpha\sqrt{\frac{1}{1 + \cos\alpha} + \frac{1}{1 - \cos\alpha}} - \sqrt{2}\ \text{cu ajutorul lui ctg}\,\alpha.$$

45. Să se calculeze expresia: $E = m\sin\alpha - n\cos\alpha$, ştiind că:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{2mn}{m^2 - n^2}\,(m \neq n).$$

B. *Aplicaţii ale formulelor* 5—16

46. Se dă $\sin\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = -\frac{1}{4}$. Să se calculeze: $\sin(\alpha + \beta)$; $\sin(\alpha - \beta)$; $\cos(\alpha + \beta)$; $\cos(\alpha - \beta)$.

47. Se dă $\text{tg}\,\alpha = 2{,}3$; $\text{tg}\,\beta = -1{,}8$. Să se calculeze: $\text{tg}(\alpha + \beta)$ şi $\text{tg}(\alpha - \beta)$.

48. Să se calculeze $\text{tg}(\alpha + \beta)$, ştiind că $\text{tg}\,\alpha = 1$ şi $\text{tg}\,\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

49. Să se calculeze $\sin(\alpha + \beta)$ şi $\cos(\alpha + \beta)$, ştiind că $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ şi $\cos\beta = \frac{3}{5}$.

Să se calculeze:

50. $\text{tg}(\alpha - \beta + \gamma).$

51. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right).$

52. $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right).$

53. $\sin 15°.$

54. $\text{ctg}\,105°.$

55. $\sin 135°.$

56. $\cos 15°.$

57. $\text{tg}\,15°.$

58. $\text{ctg}\,15°.$

59. tg 135°.

Să se verifice identitățile:

60. $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

61. $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=1-\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

62. *a)* $\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta$; *b)* $\sin\alpha=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\sin\beta\cos(\alpha-\beta)$; *c)* $\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta$.

63. $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)=0$.

64. $\cos\alpha+\cos(120°-\alpha)+\cos(120°+\alpha)=0$.

65. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta}$.

66. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta}$.

67. $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}\beta$.

68. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha\sec^2\beta}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}$.

69. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

70. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\cos\beta+\sin\beta}{\cos\beta-\sin\beta}$.

71. $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)+\operatorname{tg}(\beta-\gamma)+\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$.

72. Din egalitatea:

$\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$, să se deducă relația: $\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

73. Să se arate că expresia: $E=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)$ este independentă de α.

74. Știind că $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, să se verifice egalitățile: *a)* $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=1$; *b)* $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

75. Știind că $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, să se verifice identitățile: *a)* $\sin^2\alpha+\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha=\sin^2\beta+\sin\alpha\sin\gamma\cos\beta=\sin^2\gamma+\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;

b) $\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}^3\beta\operatorname{tg}^3\gamma-\operatorname{tg}^3\alpha-\operatorname{tg}^3\beta-\operatorname{tg}^3\gamma=\dfrac{3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

76. Știind că $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$, să se verifice identitatea:

$$(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)(1+\operatorname{tg}\gamma)=2(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma).$$

77. Știind că $\alpha+\beta=\gamma$, să se verifice identitatea: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

78. Să se demonstreze că dacă α și β sînt unghiuri ascuțite, iar $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$ și $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$, atunci $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

79. Să se demonstreze că dacă α, β, γ sînt unghiuri ascuţite şi au tangentele, respectiv, egale cu $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ şi $\frac{1}{8}$, atunci:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

80. Să se demonstreze că dacă α şi β sînt unghiuri ascuţite, iar $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$ şi $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$, atunci: $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

C. *Aplicaţii ale formulelor 17—34*

81. Se dă $\sin \alpha = 0{,}6$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$.

82. Ştiind că $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ şi că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, să se calculeze $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$.

83. Se dă $\sin \alpha = 0{,}3$. Să se calculeze $\sin 3\alpha$.

84. Se dă $\cos \alpha = -0{,}2$. Să se calculeze $\cos 3\alpha$.

85. Se dă $\sin 2\alpha = 0{,}35$. Să se calculeze $\sin \alpha$.

86. Se dă $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha$.

87. Să se calculeze $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ şi $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, ştiind că $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ şi că $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

88. Să se arate că dacă $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ şi $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$, α şi β fiind unghiuri ascuţite, avem:

$$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$

89. Se dă $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$. Să se calculeze $\operatorname{tg} 2\alpha$ şi $\operatorname{tg} 3\alpha$.

90. Se dă $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{7}$. Să se calculeze $\sin \frac{\alpha}{2}$ şi $\cos \frac{\alpha}{2}$.

91. Cunoscînd că $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$, să se calculeze $\sin \frac{\alpha}{2}$ şi $\cos \frac{\alpha}{2}$. Să se explice rezultatul.

92. Să se calculeze $\sin 4\alpha$, $\sin 5\alpha$ şi $\sin 6\alpha$, în funcţie de $\sin \alpha$ şi $\cos \alpha$.

93. Să se calculeze $\cos 4\alpha$ şi $\cos 5\alpha$, în funcţie de $\sin \alpha$ şi $\cos \alpha$.

94. Fiind dat $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$.

95. Ştiind că $\sin \alpha = m$, să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ şi $\cos 3\alpha$.

96. Ştiind că $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 - \sqrt{3}$, să se calculeze: $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ şi $\operatorname{tg} \alpha$.

97. Fiind dat $\operatorname{tg} \alpha = 1 - \sqrt{2}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ şi $\operatorname{tg} 2\alpha$.

98. Să se exprime $\sin^3\alpha$ şi $\sin^4\alpha$, prin funcţiile unghiurilor multiple ale unghiului.

99. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile: *a)* $E_1 = \sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$;

b) $E_2 = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$; *c)* $E_3 = \frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\alpha}$.

Să se verifice identităţile:

100. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.

101. $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)\sin\alpha$.

102. $\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4}\sin 2\alpha$.

103. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3\alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha$.

104. $\operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$.

105. $\sin 3\alpha \operatorname{cosec}\alpha - \cos 3\alpha \sec\alpha = 2$.

106. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$.

107. *a)* $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$;

b) $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$; *c)* $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$.

108. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}}$.

109. $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \sin 2\alpha$.

110. $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}\alpha(1 + \sec 2\alpha)$.

111. $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$.

112. $1 + \sin 2\alpha = \frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.

113. $\cos 2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}$.

114. $\sin 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

115. $\sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

116. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg}\alpha)^2$.

117. $\frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)$.

118. $\operatorname{ctg}\alpha\sin 4\alpha + 2 = 2(\cos^2 2\alpha + 2\cos^2\alpha)$.

119. $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta = 1$.

120. $\frac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos^3\alpha}{\sin\alpha} = 2\operatorname{cosec} 2\alpha - \sin 2\alpha$.

121. $\cos 2\alpha - 3\cos\alpha + 4 = \frac{\cos 3\alpha + 9}{2\cos\alpha + 3}$.

122. $\frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)$.

123. $\sin^2\frac{\alpha}{2}(1 + \cos\alpha) = \cos^2\frac{\alpha}{2}(1 - \cos\alpha)$.

124. $\cos^2\alpha = 4\cos^4\frac{\alpha}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha$.

125. *a)* $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$; *b)* $(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$.

126. Să se arate că expresia: $E = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{(1-\sin\alpha)(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}$ nu depinde de α.

D. *Aplicații ale formulelor* 35—63

Să se transforme în produs expresiile:

127. *a)* $\sin 75° + \sin 15°$; *b)* $\sin 78° - \sin 42°$; *c)* $\cos 152° + \cos 28°$; *d)* $\cos 48° - \cos 12°$.

128. *a)* $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 15°$; *b)* $\operatorname{tg} 21° + \operatorname{tg} 35°$; *c)* $1 + \operatorname{tg} 42°08'$.

129. *a)* $\sin\alpha + \cos\alpha$; *b)* $\sin\alpha - \cos\alpha$; *c)* $1 - \operatorname{tg}\alpha$; *d)* $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

130. *a)* $1 + \sin 3\alpha$; *b)* $\sin 2\alpha + \sqrt{3}\cos 2\alpha$; *c)* $a\cos^3\alpha + b\sin^3\alpha$.

131. *a)* $1 - \sin\alpha - \cos\alpha$; *b)* $1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha$; *c)* $1 + \operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha$; *d)* $1 + \sin\alpha - \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; *e)* $1 + \sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha$.

132. *a)* $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$; *b)* $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

133. *a)* $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta$; *b)* $\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta$.

134. Pentru $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. *a)* $\sqrt{1+\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos\alpha}$;

b) $\sqrt{1+\cos\alpha} - \sqrt{1-\cos\alpha}$.

135. *a)* $\cos\alpha + \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$; *b)* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$; *c)* $\sin(-\alpha+\beta+\gamma) + \sin(\alpha-\beta+\gamma) + \sin(\alpha+\beta-\gamma) - \sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

136. *a)* $\operatorname{tg}\alpha + 2\sin^2\alpha$; *b)* $\operatorname{tg}\alpha - 2\sin^2\alpha$.

137. $\frac{1-\cos 2\alpha}{1-\cos 4\alpha}$.

138. *a)* $\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; *b)* $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$; *c)* $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; *d)* $\frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\sin\alpha - \cos\beta}$; *e)* $\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}$

139. $\frac{m\sin\alpha - n\sin\beta}{m\cos\alpha - n\cos\beta}$. **140.** $\frac{a\sin\alpha + b\cos\alpha + b}{a\cos\alpha - b\sin\alpha - b}$.

141. Să se transforme în produs suma de cosinusuri a n unghiuri în progresie aritmetică:

$S = \cos\alpha + \cos(\alpha + h) + \cos(\alpha + 2h) + \ldots + \cos[\alpha + (n-1)h]$.

Aplicație. $S = \cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$. (V. indicații și răspunsuri. Să se explice aspectul diferit al rezultatelor.)

142. Să se transforme în produs expresiile:

a) $\sin\frac{5\pi}{24} + \cos\frac{11\pi}{24}$;

b) $\sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}$.

143. Să se arate că expresia:

$E = \frac{\cos 7\alpha}{2\cos\alpha} - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha$ este independentă de α.

144. Să se arate că expresia

$E = \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta$ este independentă de α şi β.

145. Să se arate că:

a) $\sin\frac{\pi}{12} \cdot \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$;

b) $\text{ccs}\ \frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

146. Să se arate că: $\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos 5^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ}$.

147. Să se arate că: *a)* $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2}$; *b)* $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

148. Să se arate că: $\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \gamma)\cos(\beta + \gamma) + \sin(\gamma - \delta)\cos(\gamma + \delta) + \sin(\delta - \alpha)\cos(\delta + \alpha) = 0$.

Să se verifice identităţile:

149. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}$.

150. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin\frac{\alpha + \beta}{2}}$.

151. $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$.

152. $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha + \beta}{2}$.

153. $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

154. $\frac{\sin\alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos\alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$.

155. $\sqrt{1 + \sin\alpha} - \sqrt{1 - \sin\alpha} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

156. $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

157. $1 - \operatorname{tg}^2\alpha \operatorname{tg}^2\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$.

158. $1 - \operatorname{ctg}^2\alpha \operatorname{ctg}^2\beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

159. $\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg} 2\alpha + 4\operatorname{tg} 4\alpha + 8\operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

160. $1 + 2(\cos 4\alpha + \cos 8\alpha) = \frac{\sin 10\alpha}{\sin 2\alpha}(\sin 2\alpha \neq 0)$.

161. $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 3\alpha-\sin 5\alpha}{2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha+\cos 3\alpha-\cos 5\alpha}{2\cos\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}$.

162. a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$;

b) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha+\sin 9\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha}=\operatorname{tg}5\alpha$;

c) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg}n\alpha$.

Ştiind că $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, să se verifice identităţile:

163. a) $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1}=\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$; b) $\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

164. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)^2}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

165. $\operatorname{tg}^2\alpha+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\sec^2\alpha$.

166. $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

167. $\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

168. $-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

169. $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

170. $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma-2=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

171. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

172. $\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma+1=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

173. $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma+1=-4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

174. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=1$.

175. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

176. $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma=1$.

E. *Aplicaţii diverse*

177. Să se transforme în produs expresia:
$E=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

178. Să se verifice identitatea: $\dfrac{\sin\alpha+2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$.

179. Să se verifice egalităţile: $\cos\dfrac{2\pi}{9}+\cos\dfrac{8\pi}{9}+\cos\dfrac{14\pi}{9}=0$.

180. $8\sin 10°\sin 50°\sin 70°=1$.

Să se verifice identităţile:

181. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha-1}=\sin\alpha\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

182. $\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + \cos^4\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) + \cos^4\left(\alpha + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$.

183. *a)* $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$; *b)* $(1 + \sin \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos \alpha$.

184. *a)* $2 \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = 1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta$;

b) $\frac{\cos^2 2\alpha + \cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2\beta + 2 \sin \alpha \sin\beta \cos(\alpha + \beta)} = 1.$

185. $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha + 2}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) + 2\sin^2 \alpha} = 8\cos^2 \alpha$.

186. $4(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 4\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha$.

187. $\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha$.

188. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} + \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2 \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha}$.

189. Să se demonstreze egalitatea: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg}\frac{2\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg}\frac{3\pi}{2n} \cdots \operatorname{tg}\frac{(n-1)\pi}{2n} = 1$.

Să se transforme în produs expresiile:

190. $E = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

191. $E = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - 3 \operatorname{tg} 3\alpha$.

192. $E = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 3\alpha$.

193. Ştiind că $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, să se arate că avem:
$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma)[1 - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma)] = 2$.

194. Să se arate că dacă: $A_1 = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$, $B_1 = 2C \sin \alpha \cos \alpha + B(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2A \sin \alpha \cos \alpha$, $C_1 = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$, atunci avem: $B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC$.

195. Să se calculeze sumele: $S_1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \ldots + \sin^2 n\alpha$; $S_2 = \sin^2 \alpha + 2^2 \sin^2 2\alpha + \ldots + n^2 \sin^2 n\alpha$.

Să se arate că:

196. $(1 - \sin \alpha)x^2 - 2x \cos \alpha + 1 + \sin \alpha \geqslant 0$.

197. $(1 + \cos \alpha)x^2 - 2x \sin \alpha + 1 - \cos \alpha \geqslant 0$.

198. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}} \geqslant 2\sqrt{3},$$

ştiind că $A + B + C = \pi$.

199. Să se arate că oricare ar fi α şi β, avem: $\cos(\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta \leqslant \frac{3}{2}$.

200. Să se arate că, dacă $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ şi $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$,
atunci avem: $\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} \leqslant \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2}$.

Capitolul 4

Ecuații trigonometrice

În trigonometrie, prin ecuații trigonometrice se înțeleg acele ecuații care conțin operații trigonometrice asupra necunoscutelor și care se pot rezolva prin metode elementare.

În multe cazuri, prin transformări echivalente, rezolvarea unei ecuații trigonometrice revine la rezolvarea unor ecuații de forma $\sin x = a$, $\cos x = a$ etc., numite ecuații elementare. Uneori însă se ajunge la ecuații reductibile la ecuații elementare, dar a căror mulțime a soluțiilor (rădăcinilor) conține, pe lîngă soluțiile ecuației, și alte elemente. De aceea este necesară verificarea soluțiilor obținute.

Din mulțimea soluțiilor nu fac parte valorile pentru care funcțiile trigonometrice care intervin în ecuație n-au sens.

Dacă în procesul rezolvării unei ecuații se face o schimbare de variabilă, noua variabilă nefiind definită pe toată axa reală, se pot pierde rădăcini, și anume valorile pentru care variabila respectivă n-are sens.

Sistemele trigonometrice pot conține și unele ecuații în care nu intervin funcțiile trigonometrice.

Rezolvarea inecuațiilor trigonometrice revine adesea la studiul semnelor unor funcții trigonometrice particulare pe un interval.

Pentru următoarele tipuri de ecuații, frecvent întîlnite în aplicații, indicăm soluțiile sau metodele de rezolvare.

a) *Ecuații elementare:*

1) $\sin x = a$ cu soluțiile $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$ $(k \in Z)$, dacă $|a| \leqslant 1$;

2) $\cos x = a$ cu soluțiile $x = \pm \arccos a + k2\pi$ $(k \in Z)$, dacă $|a| \leqslant 1$;

3) $\operatorname{tg} x = a$ cu soluțiile $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$ $(k \in Z)$;

4) $\operatorname{ctg} x = a$ cu soluțiile $x = \operatorname{arcctg} a + k\pi$ $(k \in Z)$.

Ecuațiile de forma $\sin bx = a$ etc. se reduc la precedentele cu ajutorul substituției $bx = u$.

b) *Ecuații de forma $f(u) = f(v)$:*

1) $\sin u = \sin v$ este echivalentă cu ecuația $u = (-1)^k v + k\pi$ $(k \in Z)$;

2) $\cos u = \cos v$ este echivalentă cu ecuația $u = \pm v + k2\pi$ $(k \in Z)$;

3) $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v \left(u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ este echivalentă cu ecuația $u = v + k\pi$ $(k \in Z)$;

4) $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$ $(u \neq k\pi)$ este echivalentă cu ecuaţia $u = v + k\pi$ $(k \in Z)$.

c) *Ecuaţii liniare în sin x şi cos x:* $a \sin x + b \cos x = c$, unde numerele a, b nu sînt nule în acelaşi timp.

Metoda 1. Notînd $\frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \varphi$ $(a \neq 0)$, ecuaţia devine: $\sin(x + \varphi) = c \cos\varphi$ etc.

Metoda 2. Făcînd substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, ecuaţia se transformă într-o ecuaţie de gradul al doilea în t: $(c + b)\, t^2 - 2at + c - b = 0$.

Dacă $c + b = 0$, valorile $x = \pi + k2\pi$ $(k \in Z)$, pentru care funcţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ n-are sens, sînt rădăcini ale ecuaţiei.

d) *Ecuaţii omogene în sin x şi cos x:*

$$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_k \sin^{n-k} x \cos^k x + \dots + a_n \cos^n x = 0,$$

unde numerele $a_0, a_1, \dots, a_n$ nu sînt nule în acelaşi timp.

Împărţind ambii membri cu $\cos^n x$ şi făcînd substituţia $\operatorname{tg} x = t$, se obţine ecuaţia algebrică de gradul n în t:

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie sub forma: $2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$ sau: $\cos 2x(2 \sin x - 1) = 0$, de unde: $\cos 2x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2}$.

Aşadar, ecuaţia dată are rădăcinile: $x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

2. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2.$$

Soluţie. Folosind identitatea $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, ecuaţia devine:

$$1 + \cos 12x + 2 \cos 6x = 0$$

sau, transformînd în produs suma primilor doi termeni din membrul stîng al ecuaţiei precedente:

$$2 \cos 6x (\cos 6x + 1) = 0.$$

Ultima ecuaţie se descompune în următoarele: $\cos 6x = 0$; $\cos 6x + 1 = 0$, de unde: $x = \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\right\}$ $(k \in Z)$.

3. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\cos \alpha x + \cos(\alpha - 2)x - \cos x = 0.$$

Soluţie. Transformînd în produs suma primilor doi termeni, obţinem: $2 \cos[(\alpha - 1)x] \cos x - \cos x = 0$ sau: $\cos x [2 \cos(\alpha - 1)x - 1] = 0$, de unde, pentru $\alpha \neq 1$: $x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{1}{\alpha - 1}\left(\pm\frac{\pi}{3} + k2\pi\right)\right\}$ $(k \in Z)$ şi: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$, pentru $\alpha = 1$.

4. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

Soluție. Ecuația se poate scrie succesiv sub forma: $\sin x \cos x\, (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$; $-\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{2}$; $\sin 4x = -1$, de unde: $x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

5. *Să se rezolve ecuația:*

$$4 \sin^4 4x + 4 \cos^4 4x + \cos 4x = 4 \sin^4 x + 4 \cos^4 x.$$

Soluție. Folosind identitatea: $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$, ecuația devine: $2(\sin^2 2x - \sin^2 8x) + \cos 4x = 0$ sau, ținînd seama de identitatea $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$; $2\left(\frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 16x}{2}\right) + \cos 4x = 0$ sau încă $\cos 16x = 0$, de unde: $x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{16}$ $(k \in Z)$.

6. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

Soluție. Folosind identitățile: $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$; $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, ecuația devine: $3 \sin x \cos x\, (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}$ sau: $\sin 4x = \frac{1}{2}$, de unde: $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

7. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

Soluție. Ținînd seama de identitatea $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$, ecuația devine: $(\sin 7x - \sin 5x) - (\sin 3x - \sin x) = 0$ sau, transformînd diferențele de sinusuri în produse: $2 \sin x (\cos 6x - \cos 2x) = 0$ sau încă: $-4 \sin x \sin 2x \sin 4x = 0$.
Prin urmare, ecuația dată se descompune în următoarele trei ecuații elementare: $\sin x = 0$; $\sin 2x = 0$; $\sin 4x = 0$.
Însă dacă $\sin x = 0$, atunci $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$ și $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 0$, deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația:

$$\sin 4x = 0,$$

de unde: $x = k\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

8. *Să se rezolve ecuația:*

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Soluție. Ecuația se poate scrie sub forma: $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$ sau: $(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$.

Anulînd fiecare factor, se obțin rădăcinile ecuației: $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm 2\frac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

9. *Să se rezolve ecuația:*

Soluție. Ecuația nu are sens pentru $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ și $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$, iar pentru celelalte valori ale lui x este echivalentă cu următoarea:

$$\sin x(3 + \sin 2x + \cos 2x) = 0.$$

Evident, ecuația $3 + \sin 2x + \cos 2x = 0$ nu admite soluții; de aceea, ecuația inițială se reduce la ecuația $\sin x = 0$, deci $x = k\pi$ $(k \in Z)$.

10. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^2 a + \sin^2 (a + x) + \sin^2 (a + 2x) + \sin^2 (a + 3x) = 2.$$

Soluție. Folosind identitatea $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, ecuația devine: $[\cos 2a + \cos 2(a + 2x)] + [\cos 2(a + x) + \cos 2(a + 3x)] = 0$ sau, transformînd sumele din paranteze în produse: $2 \cos 2(a + x) \cos 2x + 2 \cos 2(a + 2x) + \cos 2x = 0$ sau încă: $\cos 2x \cos x \cos (2a + 3x) = 0$.
Ultima ecuație se descompune în următoarele: $\cos 2x = 0$; $\cos x = 0$; $\cos (2a + 3x) = 0$, de unde: $x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} - \frac{2a}{3} + k\frac{\pi}{3}\right\}$ $(k \in Z)$.

11. *Să se determine valorile parametrului* α *pentru care polinomul*

$$P(x) = x^4 + x^3 \sin 3\alpha + x^2 \sin 2\alpha + x \sin \alpha - 1$$

este divizibil cu $x - 1$.

Soluție. Condiția necesară și suficientă ca $P(x) \vdots (x - 1)$ este:
$P(1) = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha = 0$ sau, transformînd suma $\sin 3\alpha + \sin \alpha$ în produs: $2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha = 0$ sau încă: $\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1) = 0$, de unde: $\alpha = \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\pm\frac{2\pi}{3} + k 2\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

12. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x.$$

Soluție. Dezvoltînd $\sin (3x + 2x)$, se deduce că: $\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x$, după care ecuația devine: $\sin x (3 \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^4 x) = 0$ sau, împărțind ambii membri cu $\cos^4 x$, $\sin x (3 \operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$, de unde: $\sin x = 0$; $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rezolvînd ultimele ecuații, obținem: $x = \{k\pi\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

13. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Soluție. Ecuația se poate scrie sub forma: $(\sin x + \cos x)\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$ sau: $\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x\right)(\sin x + \cos x - 1) = 0$. Însă: $1 - \frac{1}{2} \sin 2x > 0$, iar $\sin x + \cos x - 1 = \sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - 1 = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$.

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde: $x = \{k 2\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k 2\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

14. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^2 x\,(\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x\,(\cos x - \sin x) + 3.$$

Soluție. Ecuația nu are sens pentru $\cos x = 0$. Observînd că membrul drept al ecuației este egal cu $3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$ și împărțind ambii membri cu $\cos^2 x$, obținem: $\operatorname{tg}^2 x\,(\operatorname{tg} x + 1) = 3(\operatorname{tg} x + 1)$ sau: $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$, de unde: $x = \left\{\pm \frac{\pi}{3} + k\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

15. *Să se rezolve ecuația:*

$$32 \cos^6 x - \cos 6x = 1.$$

Soluție. Folosind identitățile: $\cos^6 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x)$;

$\cos 3 \cdot 2x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$, se ajunge la ecuația: $4 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0$, care se descompune în următoarele: $\cos 2x = -1$; $\cos 2x = -\frac{1}{4}$ și deci: $x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup$

$$\cup \left\{\pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi\right\} \quad (k \in Z).$$

16. *Să se rezolve ecuația:*

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0.$$

Soluția 1. Din formulele pentru $\sin 3x$ și $\cos 3x$, găsim: $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$, deci ecuația se poate scrie sub forma: $\cos 3x\,(\cos 3x + 3 \cos x) + \sin 3x\,(3 \sin x - \sin 3x) = 0$; $3(\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = 0$; $3 \cos 2x + \cos 6x = 0$. Însă fiindcă $\cos^3 2x = \frac{1}{4}(\cos 6x + 3 \cos 2x)$, ultima ecuație devine: $4 \cos^3 2x = 0$, de unde:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in Z).$$

Soluția 2. Scriem termenii ecuației sub forma: $\cos 3x \cos^3 x = \cos 3x \cos x \cdot \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos^2 x$; $\sin 3x \sin^3 x = \sin 3x \sin x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x)\sin^2 x$.

Grupînd termenii și ținînd seama de identitățile: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, ecuația devine: $\cos 2x + \cos 4x \cos 2x = 0$; $\cos 2x(1 + \cos 4x) = 0$ sau, transformînd suma din paranteză în produs: $2 \cos^3 2x = 0$, de unde: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

17. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$$

Soluție. Putem scrie: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ și deci: $\sin^8 x + \cos^8 x = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8}\sin^4 2x = \frac{17}{32}$; $\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + \frac{15}{4} = 0$.

Rezolvînd ecuația bipătrată obținută, găsim: *a)* $\sin^2 2x = \frac{15}{2}$; *b)* $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$.

Ecuația *a)* nu admite soluții. Din ecuația *b)* obținem: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$.

18. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x)^2 - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right).$$

Soluţie. Scriind $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, ecuaţia devine: $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 5 = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ sau, ţinînd seama de identitatea $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; $4\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - 5 = 0$.

Ultima ecuaţie este echivalentă cu următoarea: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, de unde: $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi\ (k \in Z)$.

19. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$2\sin 17x + \sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 0.$$

Soluţie. Ecuaţia se poate scrie sub forma: $2\sin 17x + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cos 5x + \sin 5x = 0$ sau: $\sin 17x + \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ sau încă: $2\sin\left(11x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$, de unde: $x = \left\{-\frac{\pi}{66} + k\frac{\pi}{11}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{36} + (2k+1)\frac{\pi}{12}\right\}\ (k \in Z)$.

20. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3.$$

Soluţie. Întrebuinţînd formule cunoscute, aducem **ecuaţia la forma**: $\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = -3$.

Fiindcă: $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$; $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, ecuaţia precedentă se reduce la următoarea: $\operatorname{tg}^2 x = 1$, de unde: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\ (k \in Z)$.

21. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(1 + \beta)\frac{\cos x \cos(2x - \alpha)}{\cos(x - \alpha)} = 1 + \beta\cos 2x.$$

Soluţie. Scriem ecuaţia sub forma: $(1+\beta)\cos x\cos(2x-\alpha) = \cos(x-\alpha) + \beta\cos 2x\cos(x-\alpha)$.

Transformînd produsele de cosinusuri în sume, ecuaţia capătă forma: $\beta[\cos(x-\alpha) - \cos(x+\alpha)] = \cos(x-\alpha) - \cos(3x-\alpha)$ sau, transformînd diferenţele de cosinusuri în produse: $\beta\sin\alpha\sin x = \sin(2x-\alpha)\sin x$.

Ultima ecuaţie este echivalentă cu următoarele: *a)* $\sin x = 0$, cu soluţiile $x = k\pi\ (k \in Z)$ şi *b)* $\sin(2x-\alpha) = \beta\sin\alpha$, cu soluţiile: $x = \frac{\alpha}{2} + (-1)^k\cdot\frac{1}{2}\arcsin(\beta\sin\alpha) + k\frac{\pi}{2}\ (k \in Z)$, dacă $|\beta\sin\alpha| \leqslant 1$.

22. *Să se arate că ecuaţia*

$$\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{4}{5}\ \textit{nu admite soluţii.}$$

Soluţie. Transformînd produsul $\sin x\ \sin 3x$ în sumă, obţinem: $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 2x(\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{2}\sin 2x\cos 4x \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$.

23. *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = m^2.$$

Soluție. Făcînd substituția $\operatorname{tg}^2 x = t$, ecuația devine: $t^2 - m^2 t + 1 = 0$, de unde: $t = \dfrac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}$.

Pentru ca t să fie real este suficient ca $m^4 - 1 \geqslant 0$, adică $|m| \geqslant 1$.
Dacă această condiție este îndeplinită, atunci:

$$t = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2} > 0.$$

Prin urmare: $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\dfrac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}}$, de unde: $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}} + k\pi \ (k \in Z)$.

24. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx.$$

unde a, b, c, d sînt termeni consecutivi și pozitivi ai unei progresii aritmetice.

Soluție. Fiindcă numerele a, b, c, d, sînt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, putem pune: $b = a + r$; $c = a + 2r$; $d = a + 3r$ (r este rația progresiei).

Transformînd produsele de sinusuri în diferențe de cosinusuri, ecuația se scrie: $\cos(2a + r)x - \cos(2a + 5r)x = 0$ sau: $2 \sin(2a + 3r)x \sin 2rx = 0$, de unde, fiindcă $2a + 3r = b + c > 0$ și $r \neq 0$: $x = \left\{k \dfrac{\pi}{2a + 3r}\right\} \cup \left\{k \dfrac{\pi}{2r}\right\}$ $(k \in Z)$.

25. *Să se rezolve ecuația:*

$$2 + \cos x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Soluție. Ecuația se poate scrie sub forma: $\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2} = 2 \left(\dfrac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - 1 \right)$ sau, după cîteva transformări, sub forma: $\left(\cos \dfrac{x}{2} - \sin \dfrac{x}{2}\right)\left(3 \cos^2 \dfrac{x}{2} + 2 \sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}\right) = 0.$

Ecuația $3 \cos^2 \dfrac{x}{2} + 2 \sin^2 \dfrac{x}{2} + \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2} = 0$ este echivalentă cu următoarea: $2 \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} + \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} + 3 = 0$ și nu admite soluții.

Așadar, ecuația dată este echivalentă cu ecuația: $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = 1$, de unde: $x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi (k \in Z)$.

26. *Să se rezolve ecuația:*

$$\operatorname{ctg} x - 2 \sin 2x = 1.$$

Soluția 1. Ecuația nu are sens pentru $x = k\pi$, iar pentru celelalte valori ale lui x este echivalentă cu următoarea: $\cos x - \sin x = 2 \sin 2x \sin x$.

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri, obținem: $\cos x - \sin x = \cos x - \cos 3x$; $\sin x = \cos 3x$; $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos 3x$, de unde: $\dfrac{\pi}{2} - x = \pm 3x + k\, 2\pi$ $(k \in Z)$ și deci: $x = \left\{\dfrac{\pi}{8} + k \dfrac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

Soluția 2. Ținînd seama de formula $\sin 2x = \frac{2\,\mathrm{tg} x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$ și notînd $\mathrm{tg}\, x = t$, ecuația devine: $t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0$ sau, descompunînd membrul stîng în factori: $(t+1)(t+1-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2}) = 0$, de unde: $t_1 = -1$; $t_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Rezolvînd ultimele ecuații, obținem: $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\mathrm{arctg}(\sqrt{2}-1) + k\pi\right\} \cup \left\{-\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1) + k\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

Observație. Se poate arăta că:

$$\left\{\mathrm{arctg}(\sqrt{2}-1) + k\pi\right\} \cup \left\{-\mathrm{arctg}(\sqrt{2}+1) + k\pi\right\} = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right\} \ (k \in Z).$$

27. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$$

Soluție. Făcînd substituția $\sin x - \cos x = t$ și folosind identitatea $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$, ecuația se scrie sub forma: $t^2 + 12t - 13 = 0$. Această ecuație are rădăcinile $t_1 = -13$, $t_2 = 1$. Însă $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, de unde $|t| \leqslant \sqrt{2}$; prin urmare, rădăcina $t_1 = -13$ nu poate fi considerată.

Ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde: $x = \left\{\pi + k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$ $(k \in Z)$.

28. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}} + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 2. \quad (1)$$

Soluție. Folosind identitățile $1 - \sin x = \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)^2$, $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$, ecuația (1) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 2$$

sau:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + \mathrm{tg}\frac{x}{2} = 2. \quad (2)$$

Dacă $1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2} \geqslant 0$, atunci $\left|1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = 1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ și ecuația (2) devine: $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = 3 + \sqrt{2} > 1$, ceea ce contrazice ipoteza făcută. Prin urmare, rămîne cazul $1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2} < 0$, deci $\left|1 - \mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| = -1 + \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ și ecuația (2) devine:

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2} = 3 - \sqrt{2} > 1,$$

de unde: $x = 2\,\mathrm{arctg}\,(3 - \sqrt{2}) + k2\pi$ $(k \in Z)$.

29. *Să se rezolve ecuația:*

$$1 + 2\,\mathrm{cosec}\, x = -\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}.$$

Soluție. Ecuația se aduce la forma: $2\cos^2\frac{x}{2}(2+\sin x)+\sin x=0$ sau, folosind formula $2\cos^2\frac{x}{2}=1+\cos x$, $2+2(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x=0$.

Făcînd substituția $\sin x+\cos x=t$, ultima ecuație se reduce la ecuația de gradul al doilea: $t^2+4t+3=0$, care are rădăcinile $t_1=-1$, $t_2=-3$.

Fiindcă $|\sin x+\cos x|=\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$, soluția $t_2=-3$ este inacceptabilă.

Prin urmare: $\sin x+\cos x=-1$ sau: $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, de unde: $x=\left\{-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\}\cup\left\{\pi+k2\pi\right\}$ $(k\in Z)$.

Observînd că ecuația inițială nu are sens pentru $x=\pi+k2\pi$ $(k\in Z)$, rezultă că soluțiile sale sînt: $x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

30. *Să se rezolve ecuația:*

$$x^2+2x\sin(xy)+1=0.$$

Soluție. Se constată ușor că $x\neq 0$. Prin urmare, ecuația poate fi scrisă sub forma echivalentă: $\sin(xy)=-\frac{x^2+1}{2x}$. (1)

Pentru ca ecuația (1) să admită soluții trebuie să fie satisfăcute inegalitățile:

$$-1\leqslant\frac{x^2+1}{2x}\leqslant 1. \qquad (2)$$

Inecuația $\frac{x^2+1}{2x}\geqslant -1$ este echivalentă cu inecuația $\frac{(x+1)^2}{2x}\geqslant 0$ și are soluțiile $x=\{-1\}\cup(0,\infty)$.

Inecuația $\frac{x^2+1}{2x}\leqslant 1$ este echivalentă cu inecuația $\frac{(x-1)^2}{2x}\leqslant 0$ și are soluțiile $x=\{1\}\cup(-\infty,0)$.

Așadar, sistemul de inecuații (2) are soluțiile $x=\{-1, 1\}$.

Pentru $x=\pm 1$, ecuația (1) devine $\sin y=-1$, de unde $y=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

În concluzie, ecuația dată este satisfăcută pentru valorile: $x=\pm 1$, $y=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$ $(k\in Z)$.

31. *Să se rezolve ecuația:*

$$\cos\frac{\pi x}{31}\cos\frac{2\pi x}{31}\cos\frac{4\pi x}{31}\cos\frac{8\pi x}{31}\cos\frac{16\pi x}{31}=\frac{1}{32}.$$

Soluție. Înmulțind ambii membri ai ecuației cu $32\sin\frac{\pi x}{31}$ și aplicînd de cîteva ori formula $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, obținem:

$$\sin\frac{32\pi x}{31}=\sin\frac{\pi x}{31}, \qquad (1)$$

de unde:

$\frac{32\pi x}{31}=\frac{\pi x}{31}+k2\pi$; $\frac{32\pi x}{31}=\pi-\frac{\pi x}{31}+k2\pi$ $(k\in Z)$ și deci: $x=\{2k\}\cup\left\{\frac{31}{33}(2k+1)\right\}$ $(k\in Z)$.

Deoarece în rezolvare am înmulţit ambii membri ai ecuaţiei cu factorul $32 \sin\frac{\pi x}{31}$, care se poate anula, ecuaţia (1) poate să aibă rădăcini care să nu satisfacă ecuaţia iniţială. Rădăcinile străine sînt acele şi numai acele rădăcini ale ecuaţiei:

$$\sin\frac{\pi x}{31} = 0, \text{ care nu satisfac ecuaţia iniţială.} \tag{2}$$

Rădăcinile ecuaţiei (2) sînt: $x = 31\,k'$ $(k' \in Z)$ (3)
şi, după cum se constată uşor, nu verifică ecuaţia iniţială.

De aceea, dintre rădăcinile ecuaţiei (1) trebuie excluse acelea care au forma (3).

Dacă $2k = 31k'$, atunci $k' = 2l$ $(l \in Z)$ şi deci $k = 31l$; dacă $\frac{31}{33}(2k+1) = 31k'$ sau $2k + 1 = 33k'$, atunci $k' = 2l + 1$ şi deci $k = 33l + 16$ $(l \in Z)$.

Aşadar, ecuaţia iniţială are rădăcinile: $x = 2k$, unde $k \neq 31l$ şi

$$x = \frac{31}{33}(2k + 1), \text{ unde } k \neq 33l + 16, \; l \text{ fiind un număr întreg arbitrar.}$$

32. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

Soluţie. Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei cu $2 \sin x$ şi transformînd produsele în sume, se obţine ecuaţia: $\sin 4x - \sin 3x = 0$, de unde: $x = \{k2\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7}\right\}$ $(k \in Z)$.

Însă prin înmulţirea ambilor termeni ai unei ecuaţii cu un factor care se poate anula se pot introduce soluţii străine, şi anume rădăcinile factorului care nu sînt rădăcini ale ecuaţiei. În cazul de faţă, factorul $2 \sin x$ se anulează pentru $x = k'\pi$ $(k' \in Z)$ şi, evident, $\cos k'\pi - \cos 2k'\pi + \cos 3k'\pi \neq \frac{1}{2}$. Prin urmare, rădăcinile ecuaţiei de forma $k'\pi$ sînt străine.

Deoarece $\{k2\pi\} \subset \{k'\pi\}$, rezultă că rădăcinile $x = k2\pi$ sînt străine.

Mai departe, dacă $\frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7} = k'\pi$, atunci $k' = 2l + 1$ $(l \in Z)$ şi deci:

$$k = 7l + 3.$$

În concluzie, ecuaţia dată are rădăcinile: $x = \frac{\pi}{7} + k\frac{2\pi}{7}$, unde $k \neq 7l + 3$, iar l este un număr întreg arbitrar.

33. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3.$$

Soluţie. Folosind identitatea: $(u + v + w)^3 - u^3 - v^3 - w^3 = 3(u + v)(v + w)(w + u)$, ecuaţia se scrie sub forma: $(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin 3x + \sin x) = 0$ sau, după transformarea sumelor de sinusuri în produse, sub forma: $\sin\frac{3x}{2} \sin 2x \sin\frac{5x}{2} \cos x \cos^2\frac{x}{2} = 0$,

de unde: $x = \left\{k\frac{2\pi}{3}\right\} \cup \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{k\frac{2\pi}{5}\right\}$ $(k \in Z)$.

Observaţie. Mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $\cos x \cos^2\frac{x}{2} = 0$ este inclusă în mulţimea rădăcinilor ecuaţiei $\sin 2x = 0$.

34. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a} \quad (ab \neq 0).$$

Soluţie. Conform unei proprietăţi a rapoartelor egale, putem scrie:

$$\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}=\frac{a\sin x+b-(a\cos x+b)}{b\cos x+a-(b\sin x+a)}=\frac{a(\sin x-\cos x)}{b(\cos x-\sin x)}.$$

Distingem două cazuri: *a)* $\sin x-\cos x=0$; *b)* $\sin x-\cos x\neq 0$. În cazul *a)* ecuaţia se reduce la identitatea evidentă: $\frac{a\sin x+b}{b\sin x+a}=\frac{a\sin x+b}{b\sin x+a}$, deci rădăcinile ecuaţiei *a)* sînt rădăcini ale ecuaţiei date.

În cazul *b)* obţinem: $\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=\frac{a\cos x+b}{b\sin x+a}=-\frac{a}{b}$

sau, egalînd primul raport cu ultimul: $\frac{a\sin x+b}{b\cos x+a}=-\frac{a}{b}$

sau încă, ţinînd seama că numitorii fracţiilor sînt nenuli: $\sin x+\cos x=-\frac{a^2+b^2}{ab}$.

Egalitatea precedentă este însă imposibilă. Într-adevăr: $\left|-\frac{a^2+b^2}{ab}\right|=\frac{a^2+b^2}{|a|\cdot|b|}\geqslant 2$,

în timp ce: $\left|\sin x+\cos x\right|=\left|\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$.

În concluzie, ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia *a)* şi are deci rădăcinile: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in Z)$.

35. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

Soluţie. Din inegalităţile: $|\cos 4x-\cos 2x|\leqslant|\cos 4x|+|\cos 2x|\leqslant 1+1=2$; $|\sin 3x+5|=\sin 3x+5\geqslant -1+5=4$ rezultă că cei doi membri ai ecuaţiei sînt egali dacă şi numai dacă: $(\cos 4x-\cos 2x)^2=4$ şi $\sin 3x+5=4$.

Folosind identitatea $\cos 4x=2\cos^2 2x-1$, se deduce că prima ecuaţie este echivalentă cu următoarea: $\cos 2x=-1$.

Aşadar, rădăcinile ecuaţiei date sînt rădăcinile comune ale ecuaţiilor: $\sin 3x=-1$; $\cos 2x=-1$.

Rezolvînd ultimele ecuaţii, problema revine la determinarea elementelor comune ale mulţimilor:

$$\left\{-\frac{\pi}{6}+k_1\frac{2\pi}{3}\right\};\quad\left\{\frac{\pi}{2}+k_2\pi\right\}(k_1,k_2\in Z).$$

Din egalitatea: $-\frac{\pi}{6}+k_1\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k_2\pi$, obţinem: $k_2=\frac{2(k_1-1)}{3}$, deci: $k_1-1=3k(k\in Z)$.

În consecinţă, ecuaţia dată are rădăcinile: $x=-\frac{\pi}{6}+(3k+1)\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in Z)$.

36. *Să se demonstreze că ecuaţia*

$$(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2\sin^2 4x=4 \text{ nu admite soluţii.}$$

Soluţie. Scriind $\sqrt{3}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$, ecuaţia capătă forma: $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin^2 4x=1$.

Ultima egalitate este posibilă numai în cazul în care: $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\pm 1$ şi $\sin 4x=\pm 1$,

de unde: $x=-\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{2}+k_1 2\pi$ şi $x=\frac{1}{4}\left(\pm\frac{\pi}{2}+k_2 2\pi\right)(k_1,k_2\in Z)$.

Egalînd cele două valori, se ajunge la egalitatea: $-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{2}+2k_1=\pm\frac{1}{8}+\frac{1}{2}k_2$ sau, după înmulţirea cu 24: $12k_2-48k_1=-8\pm 9$.

Observînd că membrul stîng este un număr par, iar membrul drept un număr impar, rezultă că ultima ecuație nu admite soluții, c.c.t.d.

37. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^n x + \cos^n x = 1, \tag{1}$$

unde n este un număr natural.

Soluție. Pentru $n = 1$, ecuația (1) devine: $\sin x + \cos x = 1$ sau: $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\text{de unde: } x = \left\{ k2\pi \right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \ (k \in Z).$$

Pentru $n = 2$ se obține identitatea: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, care este satisfăcută pentru orice x.

Dacă $n \geqslant 3$, considerăm următoarele cazuri: a) $n = 2p$ $(p = 2,3,4,\ldots)$, căruia îi corespunde ecuația: $\sin^{2p} x + \cos^{2p} x = 1$, care, evident, admite soluțiile $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$. (2)

Presupunînd $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$, din inegalitățile: $\sin^2 x < 1$; $\cos^2 x < 1$ rezultă că: $(\sin^2 x)^p < \sin^2 x$; $(\cos^2 x)^p < \cos^2 x$ sau, adunînd inegalitățile precedente: $\sin^{2p} x + \cos^{2p} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Așadar, ecuația (2) admite numai soluțiile $x = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$. b) $n = 2p + 1$ $(p = 1, 2, 3,\ldots)$, căruia îi corespunde ecuația: $\sin^{2p+1} x + \cos^{2p+1} x = 1$. (3)

Dacă $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$, din inegalitățile: $\sin^{2p-1} x < 1$, $\cos^{2p-1} x < 1$ rezultă că: $\sin^{2p+1} x + \cos^{2p+1} x = \sin^2 x \sin^{2p-1} x + \cos^2 x \cos^{2p-1} x \leqslant \sin^2 x \mid \sin^{2p-1} x \mid + \cos^2 x \mid \cos^{2p-1} x \mid < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, deci ecuația (3) nu admite soluții de forma $x \neq k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

Pe de altă parte:

$\left\{k\frac{\pi}{2}\right\} = \left\{k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} \cup \left\{\pi + k2\pi\right\} \cup \left\{3\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$ $(k \in Z)$ și, după cum se constată ușor, ecuația (3) este verificată numai de valorile

$$x = \left\{k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\} (k \in Z).$$

În concluzie, ecuația (1) admite soluțiile: $x = \left\{k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$, pentru n impar, și: $x = k\frac{\pi}{2}$, pentru n par $(n \neq 2)$, k fiind un număr întreg arbitrar.

38. *Să se demonstreze că rădăcinile x_1, x_2 ale ecuației:*

$$x^2 - 2x\sin\varphi + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\cos^2\varphi) = 0$$

sînt reale. Să se discute natura rădăcinilor cînd $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soluție. Însemnînd cu Δ realizantul ecuației, obținem: $\Delta = 4[(7 - 4\sqrt{3})\cos^2\varphi - 1 + \sqrt{3}] \geqslant 4(\sqrt{3} - 1) > 0$, deci x_1 și x_2 sînt numere reale distincte.

Mai departe, suma și produsul rădăcinilor sînt date de expresiile: $x_1 + x_2 = 2\sin\varphi$; $x_1x_2 = (2 - \sqrt{3})(1 + 2\cos\varphi)(1 - 2\cos\varphi)$.

De aici rezultă că: $x_1 + x_2 = 0$ pentru $\varphi = 0$, $x_1 + x_2 > 0$ pentru $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$; $x_1x_2 < 0$ pentru $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right)$; $x_1x_2 = 0$ pentru $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $x_1x_2 > 0$ pentru $\varphi \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Prin urmare: dacă $\varphi = 0$, atunci $x_2 = -x_1 \neq 0$; dacă $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, atunci $x_1 > 0$, $x_2 < 0$ și $x_1 > |x_2|$; dacă $\varphi = \frac{\pi}{3}$, atunci $x_1 > 0$, $x_2 = 0$; dacă $\varphi \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, atunci $x_1 > 0$, $x_2 > 0$.

39. *Pentru ce valori ale lui α ecuația*

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2\cos^2 x = \alpha$$

are rădăcini? Să se determine aceste rădăcini.

Soluție. Făcînd substituția $\operatorname{tg} x = t$, ecuația devine: $\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} - 2\frac{1}{1+t^2} = \alpha$ sau: $(1-\alpha)t^2 - t - (\alpha+2) = 0$. (1)

Dacă $\alpha = 1$, atunci ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $\cos x(\sin x + 3\cos x) = 0$, de unde: $x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{-\operatorname{arctg} 3 + k\pi\right\} (k \in Z)$.

Dacă $\alpha \neq 1$, atunci, din condiția de realitate a rădăcinilor ecuației (1): $-4\alpha^2 - 4\alpha + 9 \geqslant 0$, obținem: $\alpha \in \left[-\frac{\sqrt{10}+1}{2}, 1\right) \cup \left(1, \frac{\sqrt{10}-1}{2}\right]$.

Pentru o astfel de valoare a lui α, ecuația dată admite rădăcinile: $x = \{\operatorname{arctg} t_1 + k\pi\} \cup \{\operatorname{arctg} t_2 + k\pi\}$ $(k \in Z)$, unde t_1 și t_2 sînt rădăcinile ecuației (1).

40. *Să se determine valorile lui m pentru care ecuația*

$$m\cos^2 x + (2m^2 - m + 1)\sin x - 3m + 1 = 0$$

are rădăcini. Să se găsească aceste rădăcini.

Soluție. Folosind identitatea $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ecuația se scrie:

$$m\sin^2 x - (2m^2 - m + 1)\sin x + 2m - 1 = 0. \quad (1)$$

Distingem următoarele cazuri: a) $m = 0$, în care caz ecuația (1) devine: $\sin x + 1 = 0$ și admite rădăcinile: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in Z)$. b) $m \neq 0$. În acest caz, ecuația (1) se descompune în următoarele: $\sin x = 2m - 1$; $\sin x = \frac{1}{m}$. (2)

Ecuația dată admite rădăcini în următoarele cazuri:

1° $|2m-1| \leqslant 1$ și $\left|\frac{1}{m}\right| \leqslant 1$; 2° $|2m-1| \leqslant 1$ și $\left|\frac{1}{m}\right| > 1$; 3° $|2m-1| > 1$ și $\left|\frac{1}{m}\right| \leqslant 1$.

Rezolvînd sistemele de inecuații de mai sus, obținem soluțiile: $m = 1$ în primul caz, deci ecuațiile (2) se reduc la ecuația: $\sin x = 1$, de unde: $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ $(k \in Z)$; $m \in (0, 1)$ în al doilea caz, deci ecuația (1) este echivalentă cu ecuația: $\sin x = 2m - 1$, de unde: $x = (-1)^k \arcsin(2m-1) + k\pi$ $(k \in Z)$; $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ în al treilea caz, deci ecuația (1) este echivalentă cu ecuația: $\sin x = \frac{1}{m}$, de unde: $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{m} + k\pi$ $(k \in Z)$.

Dacă $m \in (-1, 0)$, ecuația (1) nu admite rădăcini.

41. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \alpha = 0.$$

Soluție. Folosind identitatea $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ și făcînd substituția $\sin 2x = t$, ecuația devine:

$$f(t) = t^2 - 2t - 2(1+\alpha) = 0. \quad (1)$$

Pentru ca ecuația (1) să admită rădăcini trebuie ca realizantul său să fie nenegativ și cel puțin una din rădăcini, în valoare absolută, să nu depășească unitatea.
Această problemă este însă un caz particular al următoarei.
Fie:

$$f(t) = t^2 + pt + q$$

un polinom de gradul al doilea cu coeficienții p, q funcții de un parametru α și $t_1 \leqslant t_2$ rădăcinile sale (reale).

Dacă $a<b$ sînt două numere date, problema determinării parametrului α astfel ca cel puţin una din rădăcinile t_1, t_2 să aparţină segmentului $[a, b]$ revine la rezolvarea următoarelor sisteme de inecuaţii:

$$\begin{cases} \Delta = p^2 - 4q \geqslant 0, \\ f(a) \geqslant 0, \\ f(b) \geqslant 0, \\ a \leqslant \dfrac{t_1 + t_2}{2} \leqslant b, \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

dacă $t_1, t_2 \in [a, b]$;

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ f(a) \geqslant 0, \\ f(b) < 0, \\ \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{t_1 + t_2}{2} \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

dacă $t_1 \in [a, b)$ şi $t_2 \in (b, \infty)$;

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ f(a) < 0, \\ f(b) \geqslant 0, \\ \dfrac{a+b}{2} > \dfrac{t_1 + t_2}{2}, \end{cases} \qquad \text{(III)}$$

dacă $t_2 \in (a, b]$ şi $t_1 \in (-\infty, a)$.

În cazul ecuaţiei (1), $a = -1$, $b = 1$ şi deci: $\Delta = 4(2\alpha + 3)$; $f(a) = -2\alpha + 1$; $f(b) = -2\alpha - 3$; $\dfrac{a+b}{2} = 0$; $\dfrac{t_1 + t_2}{2} = 1$. Sistemul (I) devine:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 \geqslant 0, \\ -2\alpha + 1 \geqslant 0, \\ -2\alpha - 3 \geqslant 0, \end{cases}$$

şi admite soluţia $\alpha = -\dfrac{3}{2}$, deci ecuaţia (1) are rădăcina dublă $t = 1 \in [-1, 1]$, de unde: $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$.

Sistemul (II) devine:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 > 0, \\ -2\alpha + 1 \geqslant 0, \\ -2\alpha - 3 < 0 \end{cases}$$

şi admite soluţiile $\alpha \in \left(-\dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, deci pentru aceste valori ale parametrului α, $t_1 \in [-1, 1)$, iar $t_2 \in (1, \infty)$. Ecuaţia (1) este echivalentă cu următoarea: $t_1 = \sin 2x = 1 - \sqrt{2\alpha + 3}$, de unde: $x = (-1)^k \dfrac{1}{2} \arcsin (1 - \sqrt{2\alpha + 3}) + k\dfrac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

Sistemul (III) este incompatibil fiindcă $0 = \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{t_1 + t_2}{2} = 1$.

Prin urmare, cea mai mare rădăcină a ecuaţiei (1) nu aparţine intervalului $(-1, 1]$.

În concluzie, dacă $\alpha \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$, ecuaţia dată are rădăcinile: $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \left(1 - \sqrt{2\alpha + 3}\right) + k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$.

Pentru $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$, ecuaţia nu are rădăcini.

42. *Să se determine valorile lui m pentru care ecuaţia*

$$\sin x \sin 3x = m$$

admite rădăcini. Să se găsească aceste rădăcini.

Soluţie. Transformînd membrul stîng al ecuaţiei, obţinem ecuaţia echivalentă: $\cos 2x - \cos 4x = 2m$ sau, folosind formula cosinusului unghiului dublu: $2\cos^2 2x - \cos 2x + 2m - 1 = 0$.

Notînd $\cos 2x = t$, ultima ecuaţie capătă forma: $f(t) = 2t^2 - t + 2m - 1 = 0$. (1)

Ecuaţia dată admite rădăcini atunci şi numai atunci cînd $t_1 \leqslant t_2$, rădăcinile ecuaţiei (1), sînt reale şi modulele lor nu depăşesc unitatea.

Pentru cele ce urmează sînt necesare următoarele elemente:

$\Delta = -16m + 9$; $f(-1) = 2m + 2$; $f(1) = 2m$; $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4}$.

Condiţiile $t_1 \in [-1, 1]$, $t_2 \in [-1, 1]$ sînt echivalente cu sistemul:

$$\begin{cases} -16m + 9 \geqslant 0, \\ 2m + 2 \geqslant 0, \\ 2m \geqslant 0 \end{cases}$$

care admite soluţiile $m \in \left[0, \frac{9}{16}\right]$. În acest caz, ecuaţia dată se reduce la ecuaţiile: $\cos 2x = t_1 = \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4}$; $\cos 2x = t_2 = \frac{1 + \sqrt{9 - 16m}}{4}$, de unde: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$.

Dacă $t_1 \in [-1, 1)$ şi $t_2 \in (1, \infty)$, se obţine sistemul:

$$\begin{cases} -16m + 9 > 0, \\ 2m + 2 \geqslant 0, \\ 2m < 0 \end{cases}$$

care admite soluţiile $m \in [-1, 0)$. Ecuaţia dată este echivalentă cu următoarea: $\cos 2x = t_1 = \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4}$, de unde: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$.

În sfîrşit, cazul $t_2 \in (-1, 1]$, $t_1 \in (-\infty, -1)$ nu este posibil fiindcă $\frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4} > 0 = \frac{-1 + 1}{2}$.

În concluzie, ecuaţia dată admite soluţiile: $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi (k \in Z)$, dacă $m \in \left[0, \frac{9}{16}\right]$ şi $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi$ $(k \in Z)$, dacă $m \in [-1, 0)$.

Pentru $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{9}{16}, \infty\right)$, ecuaţia nu admite soluţii.

43. *Să se rezolve ecuaţia:*

$$\arcsin x + \arccos(1 - x) = \arcsin(-x).$$

Soluție. Ținînd seama de identitatea arcsin $(-x) = -$ arcsin x, ecuația devine:

$$2 \arcsin x = -\arccos(1-x).$$

Egalînd cosinusurile ambilor membri ai ultimei ecuații, obținem: $\cos(2 \arcsin x) = 1 - x$ sau: $1 - 2x^2 = 1 - x$, de unde: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Introducînd aceste valori în ecuația dată, constatăm că numai x_1 este rădăcină. Valoarea x_2 este rădăcina ecuației: $\arcsin x - \arccos(1 - x) = \arcsin(-x)$.

44. *Să se rezolve ecuația:*

$$\sin(2 \arcsin x) = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x).$$

Soluție. Ținînd seama de identitățile: $\sin(\arcsin x) = x$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ și de funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, obținem: $\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$; $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1-x^2}$.

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu următoarea: $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$, de unde: $x = 0$.

45. *Să se rezolve ecuația:*

$$2 \arcsin x = \arccos 2x. \qquad (1)$$

Soluție. Luînd cosinusul ambilor membri ai ecuației (1), obținem:

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos(\arccos 2x) \qquad (2)$$

sau: $1 - 2\sin^2(\arcsin x) = 2x$; $1 - 2x^2 = 2x$, de unde: $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Fiindcă ecuația (2) admite rădăcini care pot fi străine pentru ecuația (1), este necesară o discuție suplimentară. Domeniul de definiție al funcției $2 \arcsin x - \arccos 2x$ se stabilește intersectînd domeniile de definiție ale funcțiilor $2 \arcsin x$ și $\arccos 2x$. Obținem:

$$\{|x| \leqslant 1\} \cap \{2|x| \leqslant 1\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

De aici rezultă că x_1 este rădăcină străină ecuației (1).

Sisteme de ecuații trigonometrice

46. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin x + 2\cos x = 1, \\ x + y = 2\pi. \end{cases}$$

Soluție. Notînd $\varphi = \operatorname{arctg} 2$, prima ecuație a sistemului devine: $\sin(x + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$, de unde: $x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + k\pi$ $(k \in Z)$.

Substituind valoarea lui x în ultima ecuație a sistemului, obținem: $y = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arctg} 2 + (2 - k)\pi$.

47. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a + x) + \cos(a + y) = 0, \\ \sin a + \sin(a + x) + \sin(a + y) = 0. \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul poate fi scris sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} \cos a(1+\cos x+\cos y)-\sin a(\sin x+\sin y)=0, \\ \sin a(1+\cos x+\cos y)+\cos a(\sin x+\sin y)=0, \end{cases}$$

de unde, ţinînd seama de faptul că funcţiile $\sin a$ şi $\cos a$ nu se anulează pentru aceeaşi valoare a argumentului: $1+\cos x+\cos y=\sin x+\sin y=0$. (1)

Ecuaţia $\sin y=\sin(-x)$ se descompune în două: $y=-x+k2\pi$; $y=\pi+x+k2\pi$ $(k\in Z)$.

Prin urmare, sistemul (1) este echivalent cu următoarele:

$$\begin{cases} y=-x+k2\pi, \\ 1+\cos x+\cos y=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=\pi+x+k2\pi, \\ 1+\cos x+\cos y=0. \end{cases}$$

Al doilea sistem este incompatibil, iar primul admite soluţiile:

$x=2\frac{\pi}{3}+l2\pi$, $y=-2\frac{\pi}{3}+m2\pi$; $x=-2\frac{\pi}{3}+l2\pi$, $y=2\frac{\pi}{3}+m2\pi$, unde l, $m\in Z$.

48. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \cos(3x+y)=\sin(-x+3y), \\ \cos(3x-y)=\sin(x+3y). \end{cases}$$

Soluţie. Sistemul este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \cos(3x+y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-x+3y)\right], \\ \cos(3x-y)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(x+3y)\right], \end{cases}$$

de unde:
$$\begin{cases} 3x+y=\pm\left(\frac{\pi}{2}+x-3y\right)+k2\pi, \\ 3x-y=\pm\left(\frac{\pi}{2}-x-3y\right)+l2\pi. \end{cases} \quad (k, l\in Z)$$

Aşadar, sistemul dat are soluţiile: $x=\frac{\pi}{12}+(2l-k)\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{12}+(2k-l)\frac{\pi}{3}$; $x=(k+l)\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{\pi}{8}+(k-l)\frac{\pi}{4}$; $x=(k+l)\frac{\pi}{4}$, $y=\frac{\pi}{4}+(l-k)\frac{\pi}{2}$; $x=-\frac{\pi}{12}+(2k-l)\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\pi}{12}+(k-2l)\frac{\pi}{3}$.

49. *Să se determine soluţiile sistemului*

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(x-y)=0 \end{cases}$$

care satisfac condiţiile: $0\leqslant x, y\leqslant\pi$.

Soluţie. Sistemul este echivalent cu următorul: $\begin{cases} x+y=k\pi, \\ x-y=l\pi, \end{cases}$ de unde: $x=(k+l)\frac{\pi}{2}$, $y=(k-l)\frac{\pi}{2}$ $(k, l\in Z)$.

Însă din condiţiile problemei obţinem: $0\leqslant k+l\leqslant 2$, $0\leqslant k-l\leqslant 2$.

Aceste inegalităţi sînt satisfăcute de următoarele 5 perechi de valori k, l : $k=0, l=0$; $k=1, l=0$; $k=1, l=-1$; $k=1, l=1$; $k=2, l=0$.

Prin urmare, se obţin soluţiile: $x_1=0, y_1=0$; $x_2=\frac{\pi}{2}, y_2=\frac{\pi}{2}$; $x_3=0, y_3=\pi$; $x_4=\pi, y_4=0$; $x_5=\pi, y_5=\pi$.

50. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} 2\cos x \cos y = 1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases} \qquad (1)$$

Soluție. Scriem sistemul sub forma echivalentă: $\begin{cases} \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1, \\ \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2. \end{cases}$ (2)

Ținînd seama de prima ecuație a sistemului (1), ecuația a doua a sistemului (2) devine:

$$\sin(x+y) = 1, \text{ de unde: } x + y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in Z). \qquad (3)$$

Substituind valoarea lui $x + y$ din (3) în prima ecuație a sistemului (2), obținem:

$$\cos(x-y) = 1, \text{ de unde: } x - y = l2\pi \ (l \in Z). \qquad (4)$$

Așadar, sistemul (1) este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x - y = l2\pi, \end{cases} \text{ de unde: } x = \frac{\pi}{4} + (k + l)\pi, \ y = \frac{\pi}{4} + (k - l)\pi.$$

51. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin x = \operatorname{cosec} x + \sin y, \\ \cos x = \sec x + \cos y. \end{cases}$$

Soluție. Aducem sistemul la forma: $\begin{cases} \sin^2 x = 1 + \sin x \sin y, \\ \cos^2 x = 1 + \cos x \cos y. \end{cases}$

Adunînd și scăzînd membru cu membru ecuațiile sistemului precedent, obținem sistemul: $\begin{cases} 1 + \cos(x-y) = 0, \\ \cos(x+y) - \cos 2x = 0 \end{cases}$ sau, folosind identități cunoscute: $2\cos^2 \dfrac{x-y}{2} = 0$,

$$2 \sin \frac{3x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0.$$

Ținînd seama de faptul că funcțiile cos și sin nu se anulează pentru aceeași valoare a argumentului, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \cos \dfrac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \dfrac{3x+y}{2} = 0, \end{cases} \text{ de unde: } \begin{cases} \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \\ \dfrac{3x+y}{2} = l\pi \end{cases} \ (k, \ l \in Z) \quad \text{și deci: } x = \frac{\pi}{4} + (l+k)\frac{\pi}{2},$$

$$y = -3\frac{\pi}{4} + (l - 3k)\frac{\pi}{2}.$$

52. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin y = 2 \sin x, \\ 2\cos x + \cos y = \sqrt{3}. \end{cases} \qquad (1)$$

Soluție. Scriind sistemul sub forma: $\begin{cases} \sin y = 2 \sin x \\ \cos y = \sqrt{3} - 2\cos x \end{cases}$ și adunînd pătratele ecuațiilor, obținem ecuația: $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. (2)

Substituind valoarea lui $\cos x$ în a doua ecuație a sistemului (1), găsim: $\cos y = 0$. (3)

Prin urmare, am obţinut sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \sin y = 2 \sin x, \\ \cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Din ultimele două ecuaţii ale sistemului precedent obţinem: $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (k, l \in Z)$.

Substituind aceste valori ale lui x şi y în prima ecuaţie a sistemului (4), se determină soluţiile sistemului iniţial: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + m2\pi;\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ y = \frac{\pi}{2} + (2m + 1)\pi$, unde $k, m \in Z$.

53. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin^3 x = \dfrac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \dfrac{1}{2} \cos y. \end{cases}$$

Soluţie. Ridicînd la pătrat ecuaţiile sistemului, adunîndu-le membru cu membru şi folosind identitatea: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$, obţinem ecuaţia: $\sin^2 2x = 1$.

Dacă $\sin 2x = 1$, atunci $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ sau $x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$.

În primul caz, din sistemul iniţial găsim $\sin y = \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $y = \frac{\pi}{4} + l2\pi$, iar în al doilea caz $\sin y = \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, adică $y = \pi + \frac{\pi}{4} + l2\pi$.

Analog se studiază şi cazul $\sin 2x = -1$.

Se obţin soluţiile: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + l2\pi;\ x = \frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + (2l + 1)\pi;$ $x = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi;\ y = -\frac{\pi}{4} + (2l + 1)\pi;\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi,\ y = -\frac{\pi}{4} + l2\pi$, unde $k, l, \in Z$.

54. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Soluţie. Împărţind prima ecuaţie la a doua, obţinem: $\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}$. (1)

Adunînd această ecuaţie cu prima şi scăzînd din (1) prima ecuaţie a sistemului, obţinem următorul sistem, echivalent cu sistemul iniţial:

$$\begin{cases} \cos (x - y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos (x + y) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \end{cases} \quad \text{de unde:} \quad \begin{cases} x - y = \pm \dfrac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x + y = \pm \arccos \dfrac{1}{2\sqrt{2}} + l2\pi. \end{cases} \quad (k, l \in Z) \qquad (2)$$

Corespunzător alegerii semnelor în ecuațiile (2), obținem soluțiile:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = \frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = -\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi. \end{cases}$$

55. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2}\sin y, \\ \sqrt{3}\sin 2x = 2\sin 2y. \end{cases}$$

Soluție. Scriem sistemul sub forma echivalentă: $\begin{cases} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x, \\ \sqrt{3}\sin x\cos x = 2\sin y\cos y. \end{cases}$ (1)

Substituind valoarea lui $\sin y$ din prima ecuație în a doua ecuație a sistemului (1), obținem ecuația: $\sin x\,(\sqrt{3}\cos x - \sqrt{2}\cos y) = 0$.

Prin urmare, sistemul (1) este echivalent cu următoarele:

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \\ \sqrt{2}\cos y = \sqrt{3}\cos x. \end{cases}$$

Primul sistem admite soluțiile $x = k\pi$, $y = l\pi$ $(k, l \in Z)$.

Adunînd ecuațiile sistemului al doilea, obținem ecuația: $\sqrt{2}(\sin y + \cos y) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ sau, după transformări: $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, de unde: $y = x + \frac{\pi}{12} + k2\pi$ (2)

și: $y = -x + 5\frac{\pi}{12} + k2\pi$. (3)

Substituind valoarea lui y din (2) în prima ecuație a sistemului (1), obținem ecuația: $\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x$ sau, dezvoltînd primul membru și ținînd seamă că: $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $(\sqrt{3}-1)(\sin x + \cos x) = 0$, de unde: $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi$.

Substituind valoarea lui x în (2), se obține: $y = -\frac{\pi}{6} + (2k+l)\pi$.

Procedînd în mod analog cu valoarea lui y din (3), obținem ecuația: $(\sqrt{3}+1)(\cos x - \sin x) = 0$, de unde: $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$.

Prin urmare: $y = \frac{\pi}{6} + (2k - l)\pi$. În concluzie, sistemul dat admite soluțiile: $x = k\pi$, $y = l\pi$; $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi$, $y = -\frac{\pi}{6} + (2k+l)\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + (2k-l)\pi$, unde $k, l \in Z$.

56. *Să se rezolve sistemul:*

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin(x-y)}{a-b}.$$

Soluție. Din ipoteză, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Aplicînd o proprietate a rapoartelor egale, sistemul poate fi scris sub forma: $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos x - \cos y}{a-b} = \frac{\sin(x-y)}{a-b}$, de unde:

$$\cos x - \cos y = \sin(x-y); \quad -2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$2\sin\frac{x-y}{2}\left[\cos\frac{x-y}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x+y}{2}\right)\right] = 0; \quad 4\sin\frac{x-y}{2}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Rezolvînd ultima ecuație, obținem: $x - y = k2\pi, x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$, $y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi$ $(k, l, m \in Z)$.

Dacă $x - y = k2\pi$, revenind la sistemul inițial, se obține: $\cos y = 0$, de unde:

$$y = \frac{\pi}{2} + k'\pi \ (k' \in Z).$$

Deci, sistemul admite soluțiile: $x = \frac{\pi}{2} + (2k + k')\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + k'\pi$.

Analog, pentru $x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$ și $y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi$, se obțin soluțiile: $x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$,

$y = \frac{\pi}{2} + l'\pi$; $x = \frac{\pi}{2} + m'\pi$, $y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi$, unde $l', m' \in Z$.

Observație. Se poate arăta că soluțiile sistemului pot fi scrise sub forma concentrată:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ y = \frac{\pi}{2} + l\pi \ (k, l \in Z).$$

57. *Să se rezolve sistemul :*

$$\begin{cases} \sin x = \operatorname{tg} y, \\ \sin y = \operatorname{tg} x. \end{cases} \quad (1)$$

Soluție. Prin ipoteză, $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$.

În aceste condiții, sistemul este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin y, \\ \sin y \cos x = \sin x. \end{cases} \quad (2)$$

Adunînd membru cu membru ecuațiile sistemului (2), obținem: $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$; $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$;

$$2\sin\frac{x+y}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}\right) = 0;$$

$$-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0,$$

de unde: *a)* $\sin\frac{x+y}{2} = 0$; *b)* $\sin\frac{x}{2} = 0$; *c)* $\sin\frac{y}{2} = 0$.

Se observă că în toate cele trei cazuri sînt respectate condițiile (1).

În cazul *a)* se obține sistemul:

$$\begin{cases} x + y = k2\pi, \\ \sin y \cos x = \sin x; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = k2\pi - x, \\ -\sin x \cos x = \sin x, \end{cases}$$

de unde: $x = l\pi$, $y = (2k - l)\pi$. (3)

În cazul *b)* se obține sistemul: $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} = 0, \\ \sin y \cos x = \sin x \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x}{2} = k\pi, \\ \sin y = 0, \end{cases}$

de unde: $x = k2\pi,\ y = l\pi.$ (4)

În cazul *c)* se obține sistemul: $\begin{cases} \sin\frac{y}{2} = 0, \\ \sin x \cos y = \sin y \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{y}{2} = k\pi, \\ \sin x = 0, \end{cases}$

de unde: $x = l\pi,\ y = k2\pi.$ (5)

Concentrînd soluțiile (3), (4), (5), soluțiile sistemului dat se pot scrie sub forma: $x = k\pi,\ y = l\pi\ (k, l \in Z)$.

58. ***Să se rezolve sistemul:***

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Soluție. Ținînd seama de inegalitatea $a^2 + b^2 \geqslant 2\,|ab|$, rezultă că: $\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| \geqslant 2.$

Pe de altă parte: $\left|2\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant 2.$

Prin urmare, prima ecuație a sistemului este satisfăcută numai de acele valori x, y pentru care:

$\left|\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right| = 2$ și $\left|\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$, adică: $\operatorname{tg} x = 1$ și $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ (1)

sau: $\operatorname{tg} x = -1$ și $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1.$ (2)

Rezolvînd sistemele (1) și (2), obținem: $x = \frac{\pi}{4} + k'\pi,\ y = \frac{\pi}{4} + l'2\pi\ (k', l' \in Z)$; (3)

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ y = -3\frac{\pi}{4} + l2\pi\ (k, l \in Z) \quad (4)$$

Soluțiile (3) nu verifică a doua ecuație a sistemului inițial, iar soluțiile (4) o verifică numai pentru $k = 2m + 1\ (m \in Z)$.

Așadar, sistemul are soluțiile: $x = 3\frac{\pi}{4} + m2\pi,\ y = -3\frac{\pi}{4} + l2\pi.$

59. ***Să se determine valorile lui a pentru care sistemul***

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases} \quad (1)$$

are soluții și să se rezolve.

Soluție. Fiindcă membrul stîng al primei ecuații nu depășește unitatea, sistemul poate să aibă soluții numai pentru $a = 0$.

În acest caz, sistemul (1) devine: $\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1, \\ \cos x \sin 2y = 0. \end{cases}$ (2)

Adunînd și scăzînd membru cu membru ecuațiile sistemului (2), obținem:

$\begin{cases} \sin(x + 2y) = 1, \\ \sin(x - 2y) = 1, \end{cases}$ de unde: $\begin{cases} x + 2y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x - 2y = \frac{\pi}{2} + l2\pi. \end{cases}$

Prin urmare, sistemul admite soluțiile: $x = \frac{\pi}{2} + (k + l)\pi,\ y = (k - l)\frac{\pi}{2}$, unde $k, l \in Z$.

60. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = \varphi, \\ \cos x \cos y = a. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are soluții?

Soluție. Scriem a doua ecuație a sistemului sub forma: $\frac{1}{2}[\cos(x + y) + \cos(x - y)] = a$ sau, ținînd seama de prima ecuație: $\cos(x - y) = 2a - \cos\varphi$.

În acest fel se obține sistemul: $\begin{cases} x + y = \varphi, \\ x - y = \pm \arccos(2a - \cos\varphi) + k2\pi, \end{cases}$ cu condiția ca $|2a - \cos\varphi| \leqslant 1$. Prin urmare: $x = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos(2a - \cos\varphi) + k\pi$, $y = \frac{\varphi}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos(2a - \cos\varphi) - k\pi$, semnele corespunzîndu-se, iar k fiind un număr întreg arbitrar.

61. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \cos(x - 2y) = a\cos^3 y, \\ \sin(x - 2y) = a\cos^3 y. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui a sistemul are soluții?

Soluție. Ridicînd la pătrat ecuațiile și adunîndu-le membru cu membru, obținem: $1 = 2a^2\cos^6 y$.
De aici rezultă că $a \neq 0$, $\cos y \neq 0$. Prin urmare, ecuațiile sistemului se pot împărți membru cu membru.

Obținem: $\operatorname{tg}(x - 2y) = 1$, de unde: $x - 2y = \frac{\pi}{4} + k\pi \; (k \in Z)$. (1)

Considerăm două cazuri: 1° k este par. Atunci avem: $\cos(x - 2y) = \frac{1}{\sqrt{2}} = a\cos^3 y$; $\cos y = \sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}} = \lambda$; $y = \pm \arccos\lambda + l2\pi \; (l \in Z)$.

Introducînd această valoare a lui y în (1), obținem: $x = \pm 2\arccos\lambda + (4l + k)\pi + \frac{\pi}{4}$.

2° k este impar. În acest caz, $\cos(x - 2y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = a\cos^3 y$; $y = \pm\arccos(-\lambda) + l2\pi \; (l \in Z)$.

Din (1) găsim: $x = \pm 2\arccos(-\lambda) + (4l + k)\pi + \frac{\pi}{4}$.

Sistemul admite soluții pentru $\left|\frac{1}{a\sqrt{2}}\right| \leqslant 1$, adică pentru $|a| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

62. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x - y = a, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{b}{c}. \end{cases} \qquad (1)$$

Soluție. Prin ipoteză, $\cos x \neq 0$, $\sin y \neq 0$, $\cos y \neq 0$, adică:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \; y \neq k_2\frac{\pi}{2} \; (k_1, k_2 \in Z). \qquad (2)$$

Distingem două cazuri: 1° $b \neq c$. Aplicînd o proprietate a rapoartelor egale, ecuația a doua a sistemului devine: $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{b + c}{b - c}$; $\frac{\sin(x + y)}{\sin(x - y)} = \frac{b + c}{b - c}$

sau, ţinînd seama de prima: $\sin(x+y) = \frac{b+c}{b-c}\sin a$.

Aşadar, sistemul (1) se reduce la următorul: $\begin{cases} y - x = a, \\ \sin(x+y) = \frac{b+c}{b-c}\sin a. \end{cases}$ (3)

Dacă $\left|\frac{b+c}{b-c}\sin a\right| \leqslant 1$, sistemul (3) este compatibil şi echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c}\sin a\right) + k\pi \quad (k \in Z), \end{cases}$$

de unde: $x = \frac{1}{2}\left[a + (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c}\sin a\right)\right] + k\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{1}{2}\left[-a + (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c}\sin a\right)\right] + k\frac{\pi}{2}$. 2° $b = c$. A doua ecuaţie a sistemului (1) devine: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$; $x - y = k\pi$ $(k \in Z)$.

Prin urmare, sistemul (1) se reduce la următorul: $\begin{cases} x - y = a, \\ x - y = k\pi. \end{cases}$

Dacă $a \neq k\pi$, ultimul sistem este incompatibil; dacă $a = k\pi$, el se reduce la ecuaţia $x - y = k\pi$. Notînd $y = t$ şi ţinînd seama de (2), rezultă că în acest caz sistemul are soluţiile: $x = t + k\pi$, $y = t$, unde t este un număr real diferit de $k_2\frac{\pi}{2}$.

63. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a. \end{cases}$$

Soluţie. Folosind identitatea $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, a doua ecuaţie a sistemului devine:

$$\cos 2x + \cos 2y = 2\cos a$$

sau, transformînd primul membru în produs şi ţinînd seama de prima ecuaţie a sistemului: $\cos a \cos(x - y) = \cos a$.

Presupunînd $\cos a \neq 0$, ultima ecuaţie se scrie: $\cos(x - y) = 1$, de unde: $x - y = k2\pi$ $(k \in Z)$.

Prin urmare, se obţine sistemul: $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = k2\pi, \end{cases}$ cu soluţiile: $x = \frac{a}{2} + k\pi, y = \frac{a}{2} - k\pi$.

În cazul $\cos a = 0$ adică $a = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$, se obţine sistemul: $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$

Din prima ecuaţie a sistemului precedent obţinem: $y = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$, deci ecuaţia a doua se reduce la identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Notînd $y = t$, obţinem soluţiile: $x = -t + \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = t$.

64. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

Soluție. Scriem sistemul sub forma echivalentă: $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = b \end{cases}$

sau, ținînd seama de prima ecuație: $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{\sin a}{\cos x \cos y} = b. \end{cases}$

Distingem două cazuri:

1° $b \neq 0$. Sistemul precedent se poate scrie sub forma: $\begin{cases} x + y = a, \\ \cos x \cos y = \dfrac{\sin a}{b} \end{cases}$ sau, ținînd seama de identitatea $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ și de prima ecuație:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \cos(x-y) = \dfrac{2\sin a}{b} - \cos a. \end{cases}$$

Dacă $\left|\dfrac{2\sin a}{b} - \cos a\right| \leqslant 1$, sistemul precedent admite soluții și este echivalent cu următorul: $\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = \pm \arccos\left(\dfrac{2\sin a}{b} - \cos a\right) + k2\pi, \end{cases}$ de unde: $x = \frac{1}{2}\left[a \pm \arccos\left(\frac{2\sin a}{b} - \cos a\right)\right] + k\pi$, $y = \frac{1}{2}\left[a \mp \arccos\left(\frac{2\sin a}{b} - \cos a\right)\right] - k\pi$ $(k \in Z)$. 2° $b = 0$. Sistemul dat devine: $\begin{cases} x + y = a, \\ \dfrac{\sin a}{\cos x \cos y} = 0. \end{cases}$

Dacă $\sin a = 0$, adică $a = k\pi$, el se reduce la ecuația: $x + y = k\pi$.

Soluțiile sînt: $x = t$, $y = k\pi - t$ $(k \in Z)$,

unde t este un număr real diferit de $\frac{\pi}{2} + k'\pi$ $(k' \in Z)$ (altminteri, a doua ecuație a sistemului n-are sens).

În sfîrșit, dacă $a \neq k\pi$, sistemul este incompatibil.

65. *Să se elimine x și y din sistemul de ecuații:*

$$\begin{cases} a \sin^2 x + b \cos^2 x = 1, \\ a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1, \\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{cases}$$

presupunînd că sistemul este compatibil și $a \neq b$.

Soluție. Observăm că $\cos x \neq 0$, $\cos y \neq 0$ (altminteri ecuația a treia a sistemului nu are sens). De aceea, primele două ecuații se pot aduce la forma:

$$(a-1)\operatorname{tg}^2 x = 1 - b, \qquad (1)$$

$$(b-1)\operatorname{tg}^2 y = 1 - a. \qquad (2)$$

Însă $a \neq 1$ fiindcă dacă $a = 1$ atunci din (1) am avea $b = 1$, ceea ce contrazice ipoteza $a \neq b$. Analog, dacă $b = 1$, atunci și $a = 1$.

Prin urmare, ecuațiile (1) și (2) se pot împărți membru cu membru.

Obţinem:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Să ne convingem acum că $a \neq 0$. Într-adevăr, dacă $a = 0$, atunci din a doua ecuaţie obţinem $\sin y \neq 0$, iar din a treia $b = 0$, adică $a = b = 0$, ceea ce nu se poate.

Datorită acestei observaţii, din a treia ecuaţie găsim:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}. \quad \text{Prin urmare: } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Dacă $\frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}$, atunci $a = b$, ceea ce nu se poate; dacă însă $\frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a}$,

atunci: $a + b = 2ab$,

care este tocmai rezultatul eliminării lui x şi y din sistemul dat.

66. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x = \sin y, \\ y = \sin z, \\ z = \sin x. \end{cases}$$

Soluţie. Luînd sinusul ambilor membri ai ultimei ecuaţii, obţinem: $\sin z = \sin \sin x$, de unde, folosind a doua ecuaţie: $y = \sin \sin x$. Luînd din nou sinusul ambilor membri ai ecuaţiei precedente, obţinem: $\sin y = \sin \sin \sin x$, de unde, ţinînd seama de prima ecuaţie a sistemului: $x = \sin \sin \sin x$. (1)

Se ştie însă că $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, egalitatea avînd loc numai pentru $\alpha = 0$.

Prin urmare: $|\sin \sin \sin x| \leqslant |\sin \sin x| \leqslant |\sin x| \leqslant |x|$. (2)

Din cele ce precedă rezultă că inegalităţile (2) se transformă în egalităţi numai pentru $x = 0$ şi deci ecuaţia (1) are soluţia unică $x = 0$.

Ţinînd seama că sistemul este circular, rezultă: $y = z = 0$. În concluzie, sistemul admite soluţia: $x = y = z = 0$.

67. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{\cos x}{a} = \dfrac{\cos y}{b} = \dfrac{\cos z}{c}, \\ \\ x + y + z = \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$$

unde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

Soluţie. Avem: $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$,

de unde, luînd cosinusul ambilor membri: $\cos z = \sin x \cos y + \cos x \sin y$. (1)

Prin permutări circulare se obţin încă două relaţii analoge. Relaţia (1) fiind omogenă în raport cu cosinusurile, acestea pot fi înlocuite prin numere proporţionale cu ele. În acest fel se obţine sistemul:

$$\begin{cases} c = b \sin x + a \sin y, \\ a = c \sin y + b \sin z, \\ b = a \sin z + c \sin x. \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu c, a doua cu $-a$, a treia cu b şi adunîndu-le, obţinem: $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \sin x$, de unde: $\sin x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. (2)

Analog: $\sin y = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$, $\sin z = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. (3)

Pentru ca ecuaţia (2) să aibă soluţii, trebuie ca: $-1 \leqslant \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leqslant 1$,

de unde: $(b + c)^2 - a^2 \geqslant 0$ şi $a^2 - (b - c)^2 \geqslant 0$ sau: $b + c \geqslant a$, $c + a \geqslant b$, $a + b \geqslant c$. (4)

Evident, ecuaţiile (3) ne vor conduce la aceleaşi relaţii între a, b, c, de unde rezultă că (4) constituie condiţiile necesare şi suficiente ca sistemul dat să admită soluţii.

Formulîndu-le altfel, rezultă că sistemul admite soluţii atunci şi numai atunci cînd cel mai mare dintre numerele a, b, c nu depăşeşte suma celorlalte două.

Distingem două cazuri:

1° *Cel mai mare dintre numerele a, b, c este strict mai mic decît suma celorlalte două.* Atunci numerele a, b, c pot fi considerate lungimile laturilor unui triunghi cu unghiurile corespunzătoare α, β, γ şi ecuaţiile (2), (3) devin: $\sin x = \cos\alpha$, $\sin y = \cos\beta$, $\sin z = \cos\gamma$, de unde:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k_1 2\pi \text{ sau } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} - \beta + k_2 2\pi \text{ sau } y = \frac{\pi}{2} + \beta + k_2 2\pi,$$

$$z = \frac{\pi}{2} - \gamma + k_3 2\pi \text{ sau } z = \frac{\pi}{2} + \gamma + k_3 2\pi, \ k_1, k_2, k_3 \text{ fiind numere întregi arbitrare.} \quad (5)$$

Ţinînd seama de relaţia $x + y + z = \frac{\pi}{2}$, se obţin următoarele soluţii:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k_1 2\pi, \ y = \frac{\pi}{2} - \beta + k_2 2\pi, \ z = \frac{\pi}{2} - \gamma + k_3 2\pi, \text{ cu condiţia } k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

şi: $x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k_1 2\pi$, $y = \frac{\pi}{2} + \beta + k_2 2\pi$, $z = \frac{\pi}{2} + \gamma + k_3 2\pi$,

cu condiţia $k_1 + k_2 + k_3 = -1$.

2° *Unul dintre numerele a, b, c este egal cu suma celorlalte două.* Se constată imediat că ecuaţiile (2) şi (3) devin:

$\sin x = -1$,	$\sin y = 1$,	$\sin z = 1$,	dacă $b + c = a$;
$\sin x = 1$,	$\sin y = -1$,	$\sin z = 1$,	dacă $c + a = b$;
$\sin x = 1$,	$\sin y = 1$,	$\sin z = -1$,	dacă $a + b = c$.

De aici rezultă soluţiile corespunzătoare:

$$x = -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \ y = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \ z = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \ y = -\frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \ z = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi;$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \ y = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \ z = -\frac{\pi}{2} + k_3 2\pi, \text{ cu condiţia } k_1 + k_2 + k_3 = 0.$$

68. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \arcsin x \arcsin y = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \arccos y = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

Soluţie. Folosind identitatea $\arcsin\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha$, prima ecuaţie a sistemului poate fi scrisă sub forma:

$$\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right)\left(\frac{\pi}{2} - \arccos y\right) = \frac{\pi^2}{12}. \quad (1)$$

Făcînd substituţia $\arccos x = u$, $\arccos y = v$ şi ţinînd seama de (1), sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right) = \dfrac{\pi^2}{12}, \\ uv = \dfrac{\pi^2}{24} \end{cases} \quad \text{sau:} \quad \begin{cases} u + v = 5\dfrac{\pi}{12}, \\ uv = \dfrac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

Rezolvînd ecuaţia $z^2 - \frac{5\pi}{12} z + \frac{\pi^2}{24} = 0$, obţinem soluţiile sistemului precedent:

$$u = \frac{\pi}{6}, \quad v = \frac{\pi}{4}; \quad u = \frac{\pi}{4}, \quad v = \frac{\pi}{6}.$$

Prin urmare, ţinînd seama de relaţiile $x = \cos u, y = \cos v$: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Inecuaţii trigonometrice

69. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\sin x + \cos x > 1.$$

Soluţie. Transformînd în produs membrul întîi, inecuaţia devine: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, de unde: $k2\pi + \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < k2\pi + 3\frac{\pi}{4}$ $(k \in Z)$ şi deci: $x \in \left(k2\pi, k2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$.

70. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\frac{1 - \sin x}{1 - 2\sin x} < \frac{1 + \sin x}{1 - 4\sin^2 x}.$$

Soluţie. Trecînd termenii în membrul drept şi aducîndu-i la acelaşi numitor, inecuaţia devine: $\frac{2\sin^2 x}{1 - 4\sin^2 x} > 0$.

Însă $\sin^2 x \geqslant 0$. Prin urmare, inecuaţia precedentă este echivalentă cu următoarea: $1 - 4\sin^2 x > 0$ sau: $|\sin x| < \frac{1}{2}$ sau încă: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$, de unde: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$ $(k \in Z)$.

71. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$|\sin x| \geqslant |\cos x|.$$

Soluţie. Funcţiile $|\sin x|$ şi $|\cos x|$ fiind periodice, cu perioada π, este suficient să se determine soluţiile inecuaţiei din intervalul $[0, \pi]$.

Se constată uşor că $x \in \left[\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right]$.

Prin urmare, inecuaţia dată admite soluţiile: $x \in \left[\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$ $(k \in Z)$.

72. *Să se rezolve inecuaţia.*

$$\sin x > \cos^2 x.$$

Soluţie. Inecuaţia este echivalentă cu următoarea: $\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$ sau, descompunînd membrul stîng în factori: $\left(\sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)\left(\sin x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) > 0$. (1)

Însă $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$, deci $\sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$.

Prin urmare, inecuaţia (1) este echivalentă cu inecuaţia: $\sin x > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, de unde:

$x \in \left(k2\pi + \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, (2k + 1)\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$ $(k \in Z)$.

73. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\frac{2\sin^2 x}{2\sin^2 x-1}>-1.$$

Soluţie. Inecuaţia se poate scrie sub forma echivalentă: $\frac{4\sin^2 x-1}{2\sin^2 x-1}>0$ sau, ţinînd seama de formula $\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$: $\frac{2\cos 2x-1}{\cos 2x}>0$. Funcţia din membrul stîng al inecuaţiei precedente este periodică, cu perioada π. De aceea este suficient să determinăm soluţiile inecuaţiei din intervalul $[0,\pi]$.

Se poate alcătui tabelul următor:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$3\frac{\pi}{4}$		$5\frac{\pi}{6}$		π
$2\cos 2x-1$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\cos 2x$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{2\cos 2x-1}{\cos 2x}$		$+$	0	$-$	|	$+$	|	$-$	0	$+$	

De aici se obţin soluţiile inecuaţiei aparţinînd intervalului $[0,\pi]$: $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},3\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(5\frac{\pi}{6},\pi\right)$.

Prin urmare, soluţia generală este: $x\in\left(k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ 3\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\cup\left(5\frac{\pi}{6}+k\pi,\pi+k\pi\right)$, unde k este un număr întreg arbitrar.

74. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\geqslant 0.$$

Soluţie. Inecuaţia poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\geqslant 0.$$

Funcţia din membrul stîng al inecuaţiei precedente este periodică, cu perioada π. De aceea este suficient să determinăm soluţiile inecuaţiei din intervalul $[0,\pi]$, care sînt date de tabelul alăturat:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$3\frac{\pi}{4}$		π
$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$		$-$	|	$+$	0	$-$	

Obţinem următoarele soluţii generale:

$x\in\left(\frac{\pi}{4}+k\pi,\ 3\frac{\pi}{4}+k\pi\right]$ $(k\in Z)$.

75. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$4\sin^2 x + 3\,\text{tg}\, x - 2\sec^2 x > 0.$$

Soluţie. Funcţia din membrul stîng al inecuaţiei are sens pentru $\cos x \neq 0$. Înmulţind ambii membri ai inegalităţii cu $\cos^2 x$, obţinem inecuaţia: $\sin^2 2x + \frac{3}{2}\sin 2x - 2 > 0$.

Ultima inecuaţie este echivalentă cu următoarea: $\sin 2x > \frac{\sqrt{41}-3}{4}$, de unde: $x \in \left(k\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4},\ k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{41}-3}{4}\right)$ $(k \in Z)$.

76. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\sin 3x \sin 4x > \sin x \sin 2x,$$

dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţie. Descompunînd produsele de sinusuri în diferenţe de cosinusuri, se obţine inecuaţia echivalentă: $\cos 3x > \cos 7x$ sau: $\sin 5x \sin 2x > 0$. Însă dacă $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\sin 2x > 0$ şi, prin urmare, inecuaţia precedentă este echivalentă cu inecuaţia: $\sin 5x > 0$, de unde: $x \in \left(0, \frac{\pi}{5}\right) \cup \left(2\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}\right)$.

77. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$$

Soluţie. Numitorul expresiei din membrul stîng al inecuaţiei este pozitiv fiindcă: $\sin x + \cos x \leqslant |\sin x + \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| \leqslant \sqrt{2}$.

De aceea, inecuaţia considerată este echivalentă cu următoarea: $\sin^2 x > \frac{1}{4}$; $|\sin x| > \frac{1}{2}$, de unde: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, 5\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$ $(k \in Z)$.

78. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\cos x - \sin x - \cos 2x > 0,$$

dacă $0 < x < 2\pi$.

Soluţie. Scriem inecuaţia sub forma echivalentă: $\cos x - \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)\,[1 - (\cos x + \sin x)] = 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)(\cos x - \sin x) > 0$.

Însă $x \in (0, 2\pi)$, deci $\sin\frac{x}{2} > 0$. Prin urmare, inecuaţia precedentă este satisfăcută în următoarele cazuri: *a)* $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} > 0, \\ \cos x - \sin x > 0. \end{cases}$ Pentru prima inecuaţie obţinem $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$, iar pentru a doua, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(5\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$.

Prin urmare, în acest caz $x \in \left(5\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$.

b) $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} < 0, \\ \cos x - \sin x < 0. \end{cases}$

Rezolvînd fiecare inecuaţie a sistemului *b)* şi intersectînd mulţimile-soluţii, obţinem $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

În concluzie, inecuaţia dată admite soluţiile: $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(5\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$.

79. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}.$$

Soluţie. Notînd $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ şi ţinînd seama de formula $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1 - t^2}$, inecuaţia devine: $\frac{t^3 - 1}{t^2 - t - 1} > 0$ sau, ţinînd seama că $t^2 + t + 1 > 0$, $\frac{t - 1}{t^2 - t + 1} > 0$. Rezolvînd ultima inecuaţie, obţinem: $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1$ sau $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, de unde: $x \in \left(k2\pi - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(k2\pi + 2\operatorname{arctg}\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \pi + k2\pi\right)$ $(k \in Z)$.

80. *Să se rezolve inecuaţia:* $\sin x > \sin 3x$.

Soluţie. Rezolvăm inecuaţia echivalentă: $\sin 3x - \sin x < 0$ sau, transformînd primul membru în produs: $\sin x \cos 2x > 0$.
Funcţia din membrul stîng al inegalităţii precedente este periodică, cu perioada 2π, deci este suficient să se determine soluţiile inecuaţiei din intervalul $[0, 2\pi]$.

Pentru aceasta se determină rădăcinile ecuaţiilor $\sin x = 0$, $\cos 2x = 0$ aparţinînd intervalului $[0, 2\pi]$ şi se alcătuieşte următorul tabel:

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$3\frac{\pi}{4}$		π		$5\frac{\pi}{4}$		$3\frac{\pi}{2}$		$7\frac{\pi}{4}$		2π
$\sin x$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0			$-$		$-$		$-$	0
$\cos 2x$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\sin x \cos 2x$	0	$+$	0		$-$		0	$+$	0	$-$	0		$+$		0	$-$	0

Prin urmare, în intervalul $[0, 2\pi]$ inecuaţia dată este satisfăcută pentru: $x \in \left(\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, 5\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(7\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$, iar soluţia sa generală este: $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(\pi + k2\pi, 5\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(7\frac{\pi}{4} + k2\pi, 2\pi + k2\pi\right)$ $(k \in Z)$.

81. *Să se rezolve inecuaţia:*

$$a^{\cos x} > a^{\sin x},$$

unde $a > 0$ *şi* $a \neq 1$.

Soluţie. Pentru $a \in (0, 1)$, inecuaţia este echivalentă cu **următoarea:** $\cos x < \sin x$.

În intervalul $[0, 2\pi]$, inecuaţia precedentă este satisfăcută **pentru** $x \in \left(\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}\right)$. Prin **urmare**, inecuaţia dată are soluţiile: $x \in \left(k2\pi + \frac{\pi}{4}, k2\pi + 5\frac{\pi}{4}\right)$ $(k \in Z)$.

Pentru $a \in (1, \infty)$, inecuaţia este echivalentă cu **următoarea:** $\cos x > \sin x$ şi este **satisfăcută** pentru: $x \in \left(k2\pi - 3\frac{\pi}{4}, k2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$ $(k \in Z)$.

82. *Să se rezolve inecuaţia:* $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1.$

Soluţie. Notînd $\frac{\pi x}{4(x+1)} = u$, inecuaţia devine: $\operatorname{tg} u > 1$ şi este satisfăcută pentru $u \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in Z)$ sau, revenind la variabila x: $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \frac{\pi}{2} + k\pi.$

Inegalităţile precedente sînt echivalente cu următoarele: $1 + 4k < \frac{x}{x+1} < 2 + 4k$; $4k < -\frac{1}{x+1} < 4k + 1$; $-\frac{1}{4k} < x + 1 < -\frac{1}{4k+1}$ sau: $-\frac{4k+1}{4k} < x < -\frac{4k+2}{4k+1}$ pentru $k \neq 0$ şi: $x < -2$ pentru $k = 0$.

Prin urmare, inecuaţia dată are soluţiile: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{4k+1}{4k}, -\frac{4k+2}{4k+1}\right)$ unde $k = \pm 1, \pm 2 \ldots$

83. *Să se rezolve inecuaţia:* $\sin(4 \cos x) > 0.$ (1)

Soluţie. Inecuaţia (1) este echivalentă cu sistemul: $k2\pi < 4 \cos x < \pi + k2\pi$ $(k \in Z)$ sau

$$k\frac{\pi}{2} < \cos x < \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Însă $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, deci (2) are sens numai pentru $k = 0, -1$ şi se reduce la sistemul:

$$0 < \cos x < \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

şi la inecuaţia: $\cos x < -\frac{\pi}{4}$. (4)

În intervalul $[0, 2\pi]$, de lungime egală cu perioada funcţiei cos, sistemul (3) este satisfăcut pentru: $x \in \left(\arccos\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2}, 2\pi - \arccos\frac{\pi}{4}\right)$, iar inecuaţia (4) pentru: $x \in \left(\pi - \arccos\frac{\pi}{4}, \pi + \arccos\frac{\pi}{4}\right)$. Prin urmare, inecuaţia dată admite soluţiile: $x \in \left(k2\pi + \arccos\frac{\pi}{4}, k2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(k2\pi - \frac{\pi}{2}, k2\pi - \arccos\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(k2\pi + \pi - \arccos\frac{\pi}{4}, k2\pi + \pi + \arccos\frac{\pi}{4}\right)$, k fiind un număr întreg arbitrar.

84. *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \cos 3x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Soluţie. Funcţiile $\operatorname{tg} x$ şi $\cos 3x$ au respectiv perioadele π, $\frac{2\pi}{3}$. Prin urmare, perioada comună a acestor funcţii este 2π. De aici rezultă că este suficient să rezolvăm sistemul (1) în intervalul $[0, 2\pi]$.

Inecuaţia $\operatorname{tg} x > 1$, admite soluţiie:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad (2)$$

iar inecuaţia $\cos 3x > -\frac{1}{2}$ admite soluţiile:

$$x \in \left[0, \frac{2\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{}\right) \cup \left(\frac{10\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{16\pi}{9}, 2\pi\right]. \quad (3$$

Intersectînd mulţimile (2) şi (3), obţinem soluţiile sistemului (1), aparţinînd intervalului $[0, 2\pi]$: $x \in \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

De aici se obţin soluţiile generale $x \in \left(\frac{4\pi}{9} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ $(k \in Z)$.

85. *Să se rezolve inecuaţia:* $\arcsin x > \arccos x$.

Soluţie. Folosind identitatea $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, inecuaţia devine: $\arcsin x > \frac{\pi}{4}$.
Pe de altă parte, funcţia arcsin este definită pentru $x \in [-1, 1]$ şi este strict crescătoare pe domeniul său de definiţie.
De aici rezultă că ultima inecuaţie este echivalentă cu următoarele:

$$\sin\frac{\pi}{4} < x \leqslant \sin\frac{\pi}{2}, \text{ deci: } x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

86. *Să se rezolve inecuaţia:* $\operatorname{arctg}^2 x - 4 \operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

Soluţie. Notînd $\operatorname{arctg} x = t$ şi ţinînd seama că $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, inecuaţia este echivalentă cu sistemul: $\begin{cases} t^2 - 4t + 3 > 0, \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ care este satisfăcut pentru $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right)$. Însă funcţia arctg este strict crescătoare pe R. Prin urmare: $x < \operatorname{tg} 1$, adică $x \in (-\infty, \operatorname{tg} 1)$.

Exerciţii şi probleme propuse

Ecuaţii trigonometrice

1. Se ştie că în intervalul $[0, 2\pi]$ ecuaţia:

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$$

are numai două rădăcini: $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $x_2 = \pi$. Să se găsească toate rădăcinile sale.

2. Numărul x_1 este rădăcină a ecuaţiei date. Fără să se facă calculele corespunzătoare, să se indice dacă x_2 este rădăcină:

a) $\sin 2x + 3 \sin x - 3 = 0$ $\left(x_1 = \frac{\pi}{2}, x_2 = 9\frac{\pi}{2}\right)$;

b) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ $(x_1 = \pi,\ x_2 = 4\pi)$.

3. Să se rezolve ecuaţia: $\sin 3x = 2 \sin^3 x$.

4. Să se rezolve ecuaţia: $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$.

5. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$; *b)* $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$.

6. Să se rezolve ecuaţia: $2 \sin x + 2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$.

7. Să se rezolve ecuaţia: $\operatorname{tg} 2x = 2 \cos x$.

8. Să se rezolve ecuaţia: $\operatorname{tg}(x - 30°) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x + 30°) = 0$.

9. Să se găsească sinusul şi cosinusul unghiului x care satisface ecuaţia: $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0$.

10. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$; *b)* $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} = 2$.

11. Să se determine arcul al cărui cosinus este egal cu coarda corespunzătoare.

12. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\cos x - \sin x + 2 = 2\cos^2 x + \sin 2x$; *b)* $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$; *c)* $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$.

13. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\sin x \operatorname{tg} x = 2$; *b)* $2\sin x \sin 3x = 1$; *c)* $8\sin^6 x + 3\cos 2x + 2\cos 4x + 1 = 0$.

14. Să se rezolve ecuaţia: $8\cos^6 x - 8\cos^4 x + 4\cos^2 x - 1 = 0$.

15. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$; *b)* $2 - (7 + \sin 2x)\sin^2 x + (7 + \sin 2x)\sin^4 x = 0$.

16. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\sin 8x + 4\sin 4x \sin^2 2x + 8\sin 2x \sin^2 x - 8\cos^2 x = 0$; *b)* $\sin^8 x - \cos^8 x - 2\sin^2 x + 1 = 0$.

17. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x$; *b)* $\sin^2 x + \cos^2 x +$

$$+ \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 7.$$

18. Să se rezolve ecuaţia: $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$.

19. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$; *b)* $\operatorname{tg} 4x - 3\operatorname{tg} 2x = 0$.

20. Să se rezolve ecuaţiile: *a)* $\cos x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$; *b)* $\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{8}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

21. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x} = 2$; *b)* $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \sec x - \operatorname{cosec} x = 0$;

c) $2\operatorname{ctg} 2x - 3\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$; *d)* $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$; *e)* $\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$; *f)* $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

22. Se consideră ecuaţia: $\cos x + \sqrt{3}\sin x = a^2$.
Să se determine valoarea maximă a numărului a pentru care ecuaţia admite soluţii şi să se rezolve în acest caz.

23. Să se rezolve ecuaţia: $\sin x \operatorname{tg} x + 2\cos x = m$.
Se vor indica condiţiile de posibilitate ale problemei.

24. Să se rezolve ecuaţia: $\sin 2x = m \operatorname{tg} x$.

25. Să se rezolve ecuaţia: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = m^2$.

26. Să se rezolve ecuaţia: $2\sin^2 x + 3(m - 1)\cos x + m = 0$.

27. Să se rezolve ecuaţia:

$$(2m^2 + m - 1)\cos 2x - 2(2m + 1)\cos x + 2m^2 + m + 1 = 0.$$

Sisteme de ecuaţii trigonometrice

28. Să se rezolve sistemul: $2(\sin 2x + \sin 2y) = 2\sin(x + y) = 1$.

29. Să se rezolve sistemele:

a) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3} \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

30. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

31. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right), \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2y. \end{cases}$

32. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$

33. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x + y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$

34. Să se determine unghiul α astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} x - y = \alpha, \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases}$$

să admită soluții. Să se găsească aceste soluții.

35. Să se exprime $\cos \alpha$ și $\sin \beta$ prin A și B, știind că:

$$\sin \alpha = A \sin \beta, \quad \operatorname{tg} \alpha = B \operatorname{tg} \beta.$$

36. Să se găsească condițiile pe care trebuie să le satisfacă numerele a, b, c pentru ca sistemul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a, \\ \cos x + \cos y = 2b, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = c \end{cases}$$

să admită cel puțin o soluție.

37. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$

38. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \sin y = m \sin x, \\ 2\cos x + \cos y = 1. \end{cases}$

39. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha, \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha. \end{cases}$

40. Să se elimine unghiul x din ecuațiile sistemului: $\begin{cases} \sin x + \cos x = m, \\ \sin^3 x + \cos^3 x = n. \end{cases}$

41. Să se elimine unghiul a din ecuațiile sistemului: $\begin{cases} x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a, \\ x \sin 3a + y \sin 6a = \sin 9a. \end{cases}$

42. Din ecuațiile sistemului: $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$

să se găsească o relație independentă de x și y.

43. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y, \\ \cos[3\pi(x+y)] = 1. \end{cases}$

Inecuații trigonometrice

44. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $\cos x \leqslant -\frac{1}{2}$; *c)* $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} 2$; *d)* $\operatorname{ctg} x \geqslant \sqrt{3}$; *e)* $\frac{1}{|\cos x|} > 1$

45. Să se rezolve inecuația: $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$.

46. Să se rezolve inecuația: $|\operatorname{tg} x| > |\operatorname{ctg} x|$.

47. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\sin 2x > \sin 4x$; *b)* $\operatorname{tg}\frac{x}{3} < \operatorname{tg} x$.

48. Să se rezolve inecuația: $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$.

49. Să se rezolve inecuația: $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$.

50. Să se rezolve inecuația: $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 1 + \operatorname{ctg} x$.

51. Să se rezolve inecuația: $\sin\varphi > 4\sqrt{3}\cos^3\varphi$.

52. Să se rezolve inecuația: $\frac{\cos x}{\sin^2 x(\cos x - \sin x)} > 1$.

53. Să se rezolve inecuația: $\frac{2\cos^2 x - 1}{\sin x - \cos x - \sqrt{2}} \leqslant 0$.

54. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\arcsin x < 1$; *b)* $\arccos x > 0$; *c)* $\arccos x < -\frac{\pi}{3}$;

d) $\operatorname{arctg} x < 2$; *e)* $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{2}$.

55. Să se rezolve inecuația: $\arccos x > \arccos x^2$.

56. Să se rezolve inecuația: $\arcsin(x^2 + 1) < 2$.

57. Să se rezolve inecuația: $\arcsin^2 x - 3\arcsin x + 2 > 0$.

Capitolul **5**

Numere complexe sub forma trigonometrică

Numărul complex $z = x + iy$ poate fi reprezentat într-un plan prin punctul $M(x, y)$. Dacă O este originea axelor de coordonate din plan, lungimea segmentului OM se numeşte modulul numărului z şi se notează cu $|z|$ sau cu ρ. Unghiul orientat dintre axa Ox şi vectorul $\overrightarrow{OM}$ se numeşte argumentul numărului complex z şi se notează cu arg z sau cu φ. Avem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Numărul complex poate fi scris sub *forma trigonometrică:*

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Numărul $\bar{z} = x - iy$ se numeşte conjugatul numărului complex z.

Numerele $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ şi $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ sînt egale dacă $\rho_1 = \rho_2$ şi $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$, $(k \in Z)$.

Produsul numerelor complexe $z_h = \rho_h (\cos \varphi_h + i \sin \varphi_h)$, $h = 1, \ldots, n$) este:

$$z_1 z_2 \ldots z_n = \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)].$$

Cîtul numerelor z_1 şi $z_2 \neq 0$ este: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$.

Puterea numărului complex z este: $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

În legătură cu puterea unui număr complex avem formula lui Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Rădăcina de ordinul n dintr-un număr complex z are n valori distincte date de formula:

$$\sqrt[n]{\rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n}\right), \quad (k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Rădăcinile de ordinul n ale numărului 1 se numesc *rădăcinile de ordinul n ale unității* și sînt egale cu: $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0,1, \ldots, n-1)$.

O ecuație de forma: $z^n + \alpha = 0$, unde α este o constantă complexă, se numește *ecuație binomă*.

Exerciții și probleme rezolvate

1. *Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:*

a) $\sqrt{3} + i$; *b)* $-1 + i\sqrt{3}$; *c)* $\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}}$; *d)* $2 - \sqrt{3} + i$.

Soluție. a) Avem $\rho = \sqrt{3+1} = 2$. Cu această valoare deducem: $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{1}{2}$, deci: $\varphi = 30°$. Rezultă: $z_1 = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$.

b) Avem $\rho = \sqrt{1+3} = 2$, deci: $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, de unde: $\varphi = 120°$, adică: $z_2 = 2(\cos 120° + i\sin 120°)$. *c)* Avem $\rho = \sqrt{2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}} = 2$. De aici rezultă: $\cos\varphi =$

$$= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \text{deci: } \varphi = 67°30'.$$

Rezultă că: $z_3 = 2(\cos 67°30' + i\sin 67°30')$. *d)* Avem: $\rho = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$.

Cu această valoare deducem: $\cos\varphi = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, adică: $\varphi = 75°$. Deci: $z_4 = (\sqrt{6}-\sqrt{2})(\cos 75° + i\sin 75°)$.

2. *Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:*

a) $\sin\alpha + \cos\alpha + i(\sin\alpha - \cos\alpha)$; *b)* $1 + \operatorname{tg}\alpha + i(1 - \operatorname{tg}\alpha)$, $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$.

Soluție. a) Avem: $\rho = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2} = \sqrt{2}$.

De aici deducem: $\cos\varphi = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} =$

$= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, $\sin\varphi = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} =$

$= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, adică: $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{4}$. Rezultă: $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

b) Avem: $\rho = \sqrt{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2 + (1-\operatorname{tg}\alpha)^2} = \sqrt{2(1+\operatorname{tg}^2\alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{|\cos\alpha|}$.

Cu această valoare obţinem: $\cos\varphi = \frac{(1 + \operatorname{tg}\alpha) | \cos\alpha |}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{| \cos\alpha |}{\cos\alpha} =$

$= \frac{| \cos\alpha |}{\cos\alpha} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$, $\sin\varphi = \frac{(1 - \operatorname{tg}\alpha) | \cos\alpha |}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{| \cos\alpha |}{\cos\alpha} =$

$= \frac{| \cos\alpha |}{\cos\alpha} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

Dacă $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, atunci $| \cos\alpha | = \cos\alpha$ şi deci: $\varphi = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Dacă: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, atunci $| \cos\alpha | = -\cos\alpha$ şi deci: $\varphi = \frac{5\pi}{4} - \alpha$.

Rezultă că: $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\right]$, dacă: $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ şi:

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)\right], \text{ dacă: } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

3. *Să se demonstreze că dacă* $| z | < \frac{1}{2}$, *atunci:*

$$| (1 + i) z^3 + iz | < \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Din inegalitatea: $| z_1 + z_2 | \leqslant | z_1 | + | z_2 |$, deducem: $| (1 + i) z^3 + iz | \leqslant | (1 + i) z^3 | + | iz |$. Dar: $| (1 + i) z^3 | = | 1 + i | \cdot | z^2 | = \sqrt{2}\, | z^3 |$ şi $| iz | = | i | \cdot | z | = | z |$.

Ţinînd seama că $| z | < \frac{1}{2}$, rezultă că: $| (1 + i) z^3 | + | iz | < \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$

$$= \frac{\sqrt{2} + 4}{8} < \frac{2 + 4}{8} = \frac{3}{4}, \text{ deci: } | (1 + i) z^3 + iz | < \frac{3}{4}.$$

4. *Să se determine forma trigonometrică a numerelor complexe z care pot fi scrise sub forma:* $z = \frac{1 - ai}{1 + ai}$, *unde a este un număr real.*

Soluţie. Din expresia numărului z rezultă că: $z = \frac{1 - a^2 - 2ai}{1 + a^2}$.

Dacă notăm $a = \operatorname{tg}\varphi$, ceea ce este totdeauna posibil oricare ar fi numărul real a, rezultă:

$$z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi - 2i\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}.$$

Dar: $\frac{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \cos 2\varphi$, $\frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = \sin 2\varphi$, adică: $z = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi$. De aici deducem: $| z | = 1$.

5. *Să se determine modulele şi argumentele următoarelor numere complexe: a)* $z_1 = (1 + i\sqrt{3})(1 - i)(\sin\alpha - i\cos\alpha)$, *b)* $z_2 = \frac{(-\sqrt{3} + i)(1 + i)(\cos\alpha - i\sin\alpha)}{(1 - i\sqrt{3})(-1 + i)(\sin\alpha + i\cos\alpha)}$.

Soluţie. a) Avem: $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$, $1 - i = \sqrt{2}(\cos 315° + i\sin 315°)$, $\sin\alpha - i\cos\alpha = \cos(\alpha - 90°) + i\sin(\alpha - 90°)$, deci: $z_1 = 2\sqrt{2}[\cos(285° + \alpha) + i\sin(285° + \alpha)]$, adică: $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, $\varphi_1 = 285° + \alpha$.

b) Avem: $-\sqrt{3} + i = 2(\cos 150° + i\sin 150°)$, $1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°)$, $1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 300° + i\sin 300°)$, $-1 + i = \sqrt{2}(\cos 135° + i\sin 135°)$, $\cos\alpha - i\sin\alpha = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)$, $\sin\alpha + i\cos\alpha = \cos(90° - \alpha) + i\sin(90° - \alpha)$, de unde deducem: $z_2 = \cos(-330°) + i\sin(-330°)$ sau: $z_2 = \cos 30° + i\sin 30°$. Deci: $\rho_2 = 1$, $\varphi_2 = 30°$.

6. *Să se determine modulele şi argumentele următoarelor numere complexe:*

$$z_1 = (1-i)^{24},\quad z_2 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{16},\quad z_3 = \left(1+\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{25},\quad z_4 = \frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1+i)^9} + \frac{(\sqrt{3}+i)^{16}}{(1-i)^9}.$$

Soluţie. Avem:

$$1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\quad 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right),\quad \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right),$$

$$2+\sqrt{3}+i = (\sqrt{6}+\sqrt{2})\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Cu aceste valori deducem: $z_1 = 2^{12}(\cos 42\pi + i\sin 42\pi) = 2^{12}$; $z_2 =$

$$= \left[\frac{2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right]^{16} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)\right]^{16} = 2^8\left(\cos\frac{68\pi}{3} + i\sin\frac{68\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^8\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right);\quad z_3 = \left[\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right]^{25} = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{25}\left(\cos\frac{25\pi}{12} +\right.$$

$$\left. + i\sin\frac{25\pi}{12}\right) = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{25}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$z_4 = \frac{2^{16}\left(\cos\frac{88\pi}{3} + i\sin\frac{88\pi}{3}\right)}{2^4\sqrt{2}\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\sin\frac{9\pi}{4}\right)} + \frac{2^{16}\left(\cos\frac{8\pi}{3} + i\sin\frac{8\pi}{3}\right)}{2^4\sqrt{2}\left(\cos\frac{63\pi}{4} + i\sin\frac{63\pi}{4}\right)} =$$

$$= 2^{11}\sqrt{2}\left[\cos\frac{325\pi}{12} + i\sin\frac{325\pi}{12} + \cos\left(-\frac{157\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{157\pi}{12}\right)\right] =$$

$$= 2^{11}\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right] = 2^{12}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12}.$$

De aici rezultă: $\rho_1 = 2^{12}$, $\varphi_1 = 0$; $\rho_2 = 2^8$, $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$; $\rho_3 = \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^{25}$, $\varphi_3 = \frac{\pi}{12}$;

$$\rho_4 = 2^{12}\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12},\quad \varphi_4 = 0.$$

7. *Să se calculeze expresia:* $(1-\cos\alpha + i\sin\alpha)^n$, $(\alpha \neq 2k\pi)$.

Soluţie. Dacă notăm $z = 1-\cos\alpha + i\sin\alpha$, avem: $\rho = \sqrt{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} =$ $= \sqrt{2-2\cos\alpha} = \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} = 2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$.

Cu această valoare deducem: $\cos\varphi = \dfrac{1-\cos\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \dfrac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$,

$$\sin\varphi = \frac{\sin\alpha}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Dacă $2k\pi < \frac{\alpha}{2} < (2k+1)\pi$, atunci $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$, deci: $\cos\varphi = \sin\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\sin\varphi = \cos\frac{\alpha}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, adică: $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$, şi deci: $z = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$.

De aici rezultă că, dacă $4k\pi < \alpha < 2(2k+1)\pi$: $(1 - \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = 2^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{n(\pi-\alpha)}{2} + i\sin\frac{n(\pi-\alpha)}{2}\right]$.

Dacă $(2k+1)\pi < \frac{\alpha}{2} < 2(k+1)\pi$, atunci $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$, deci: $\cos\varphi = -\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, $\sin\varphi = -\cos\frac{\alpha}{2} = \cos\left(\pi + \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$, adică: $\varphi = \frac{3\pi - \alpha}{2}$,

de unde: $z = -2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{3\pi-\alpha}{2} + i\sin\frac{3\pi-\alpha}{2}\right)$.

De aici deducem, dacă $2(2k+1)\pi < \alpha < 4(k+1)\pi$: $(1 - \cos\alpha + i\sin\alpha)^n = (-2)^n\sin^n\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{n(3\pi-\alpha)}{2} + i\sin\frac{n(3\pi-\alpha)}{2}\right]$.

8. ***Ştiind că*** $z + \frac{1}{z} = 2\sin\alpha$, ***să se calculeze suma*** $z^m + \frac{1}{z^m}$.

Soluţie. Din relaţia $z + \frac{1}{z} = 2\sin\alpha$, rezultă că: $z^2 - 2z\sin\alpha + 1 = 0$, adică: $z = \sin\alpha \pm \sqrt{\sin^2\alpha - 1} = \sin\alpha \pm i\cos\alpha$, deci z este un număr complex al cărui modul este 1. Dacă notăm: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$$\text{avem: } \frac{1}{z} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \tag{1}$$

deci relaţia dată devine: $\cos\varphi = \sin\alpha$ sau: $\cos\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, de unde:

$$\varphi = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \tag{2}$$

Ţinînd seama de (1), rezultă: $z^m = \cos m\varphi + i\sin m\varphi$ şi: $\frac{1}{z^m} = \cos m\varphi - i\sin m\varphi$.

Cu aceste valori obţinem: $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\varphi$ sau, avînd în vedere relaţia (2): $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos\left[2mk\pi \pm m\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]$, adică: $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Dacă $m = 4n$, avem: $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\cos m\alpha$; dacă $m = 4n+1$, avem: $z^m + \frac{1}{z^m} = 2\sin m\alpha$; dacă $m = 4n+2$, avem: $z^m + \frac{1}{z^m} = -2\cos m\alpha$; dacă $m = 4n+3$, avem:

$$z^m + \frac{1}{z^m} = -2\sin m\alpha.$$

9. *Să se exprime funcțiile trigonometrice ale arcului 7φ cu ajutorul acelorași funcții ale arcului φ.*

Soluție. Avem: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^7 = \cos^7\varphi + C_7^1 i\cos^6\varphi\sin\varphi\ C_7^2 i^2\cos^5\varphi\sin^2\varphi +$ $+ C_7^3 i^3\cos^4\varphi\sin^3\varphi + C_7^4 i^4\cos^3\varphi\sin^4\varphi + C_7^5 i^5\cos^2\varphi\sin^5\varphi + C_7^6 i^6\cos\varphi\sin^6\varphi + C_7^7 i^7\sin^7\varphi$, sau ținînd seama de formula lui Moivre, de valorile combinărilor și de expresiile diverselor puteri ale lui i: $\cos 7\varphi + i\sin 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi +$ $+ i(7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi)$.

De aici rezultă:

$$\cos 7\varphi = \cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi, \qquad (1)$$

$$\sin 7\varphi = 7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi. \qquad (2)$$

Avînd în vedere formulele:

$\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, $\sin^4\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi + \cos^4\varphi$, $\sin^6\varphi = 1 - 3\cos^2\varphi + 3\cos^4\varphi - \cos^6\varphi$,

$\cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi$, $\cos^4\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$, $\cos^6\varphi = 1 - 3\sin^2\varphi + 3\sin^4\varphi - \sin^6\varphi$,

din (1) și (2) deducem: $\cos 7\varphi = 64\cos^7\varphi - 112\cos^5\varphi + 56\cos^3\varphi - 7\cos\varphi$, $\sin 7\varphi = 7\sin\varphi -$ $- 56\sin^3\varphi + 112\sin^5\varphi - 64\sin^7\varphi$.

Din relațiile (1) și (2) obținem: $\operatorname{tg} 7\varphi = \dfrac{7\cos^6\varphi\sin\varphi - 35\cos^4\varphi\sin^3\varphi + 21\cos^2\varphi\sin^5\varphi - \sin^7\varphi}{\cos^7\varphi - 21\cos^5\varphi\sin^2\varphi + 35\cos^3\varphi\sin^4\varphi - 7\cos\varphi\sin^6\varphi}$,

de unde, simplificînd cu $\cos^7\varphi$: $\operatorname{tg} 7\varphi = \dfrac{7\operatorname{tg}\varphi - 35\operatorname{tg}^3\varphi + 21\operatorname{tg}^5\varphi - \operatorname{tg}^7\varphi}{1 - 21\operatorname{tg}^2\varphi + 35\operatorname{tg}^4\varphi - 7\operatorname{tg}^6\varphi}$.

Analog obținem: $\operatorname{ctg} 7\varphi = \dfrac{\operatorname{ctg}^7\varphi - 21\operatorname{ctg}^5\varphi + 35\operatorname{ctg}^3\varphi - 7\operatorname{ctg}\varphi}{7\operatorname{ctg}^6\varphi - 35\operatorname{ctg}^4\varphi + 21\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}$.

10. *Să se demonstreze formulele:*

$$\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k\cos 2(m-k)\alpha + \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^m,$$

$$\cos^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k\cos(2m-2k+1)\alpha.$$

Soluție. Dacă notăm: $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, atunci: $\dfrac{1}{z} = \cos\alpha - i\sin\alpha$, și deci: $\cos\alpha =$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad (1)$$

De asemenea, din formula lui Moivre deducem: $z^k = \cos k\alpha + i\sin k\alpha$ și de aici: $\dfrac{1}{z^k} = \cos k\alpha - i\sin k\alpha$, de unde:

$$\cos k\alpha = \frac{1}{2}\left(z^k + \frac{1}{z^k}\right). \qquad (2)$$

Din (1) rezultă: $\cos^{2m}\alpha = \dfrac{1}{2^{2m}}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)^{2m}$ sau, avînd în vedere formula binomului lui Newton: $\cos^{2m}\alpha = \dfrac{1}{2^{2m}}\Big(z^{2m} + C_{2m}^1 z^{2m-2} + \ldots + C_{2m}^{m-1}z^2 + C_{2m}^m + C_{2m}^{m+1}\dfrac{1}{z^2} + \ldots +$

$$+ C_{2m}^{2m-1}\frac{1}{z^{2m-2}} + C_{2m}^{2m}\frac{1}{z^{2m}}\Big).$$

Ținînd seama că $C_n^p = C_n^{n-p}$, această formulă se scrie: $\cos^{2m}\alpha = \dfrac{1}{2^{2m}}\Big[\Big(z^{2m} + \dfrac{1}{z^{2m}}\Big) +$ $+ C_{2m}^1\Big(z^{2m-2} + \dfrac{1}{z^{2m-2}}\Big) + \ldots + C_{2m}^{m-1}\Big(z^2 + \dfrac{1}{z^2}\Big) + C_{2m}^m\Big]$.

Înlocuind aici formula (2), deducem: $\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}[2\cos 2m\alpha + 2C_{2m}^{1}\cos 2(m-1)\alpha +$ $+ \ldots + 2C_{2m}^{m-1}\cos 2\alpha + C_{2m}^{m}]$, adică: $\cos^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^{k}\cos 2(m-k)\alpha + \frac{1}{2^{2m}}C_{2m}^{m}$.

Ridicînd relația (1) la puterea $2m+1$, obținem: $\cos^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m+1}}\Big(z^{2m+1} + C_{2m+1}^{1}z^{2m-1} +$ $+ \ldots + C_{2m+1}^{m}z + C_{2m+1}^{m+1}\frac{1}{z} + \ldots + C_{2m+1}^{2m}\frac{1}{z^{2m-1}} + C_{2m+1}^{2m+1}\frac{1}{z^{2m+1}}\Big)$.

Ținînd seama de formula (2), rezultă: $\cos^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^{k}\cos(2m-2k+1)\alpha$.

11. *Să se calculeze suma:*

$$S = 1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi,\ (a>0).$$

Soluție. Se consideră suma: $T = a\sin\varphi + a^2\sin 2\varphi + \ldots + a^k\sin k\varphi$. Avem: $S + iT =$ $= 1 + a(\cos\varphi + i\sin\varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + a^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$.

Notînd $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$ și ținînd seama de formula lui Moivre, rezultă: $S + iT = 1 +$ $+ az + a^2z^2 + \ldots + a^kz^k$ sau, făcînd suma progresiei geometrice din membrul al doilea: $S +$ $+ iT = \frac{a^{k+1}z^{k+1} - 1}{az - 1}$.

Dacă amplificăm fracția din membrul al doilea cu $\frac{a}{z} - 1$, obținem: $S + iT =$

$$= \frac{a^{k+2}z^k - a^{k+1}z^{k+1} - \frac{a}{z} + 1}{a^2 - a\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}$$ sau, ținînd seama de expresia lui z: $S + iT =$

$$= \frac{a^{k+2}(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) - a^{k+1}[\cos(k+1)\varphi + i\sin(k+1)\varphi] - a(\cos\varphi - i\sin) + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}.$$

De aici rezultă: $S = \frac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$.

12. *Să se calculeze sumele:*

$$A = \cos\varphi + C_n^1\cos 2\varphi + \ldots + C_n^n\cos(n+1)\varphi,$$
$$B = \sin\varphi + C_n^1\sin 2\varphi + \ldots + C_n^n\sin(n+1)\varphi.$$

Soluție. Dacă notăm $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, avem: $A + iB = z + C_n^1z^2 + \ldots + C_n^nz^{n+1}$, sau, ținînd seama de formula binomului lui Newton: $A + iB = z(1+z)^n$, adică: $A + iB = (\cos\varphi +$ $+ i\sin\varphi)(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n$. Dar $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$, $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$, deci:

$$(1 + \cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\varphi}{2} + i\sin\frac{n\varphi}{2}\right).$$

Rezultă că: $A + iB = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\left(\cos\frac{n+2}{2}\varphi + i\sin\frac{n+2}{2}\varphi\right)$.

Deci: $\cos\varphi + C_n^1\cos 2\varphi + \ldots + C_n^n\cos(n+1)\varphi = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\cos\frac{(n+2)\varphi}{2}$, $\sin\varphi +$ $+ C_n^1\sin 2\varphi + \ldots + C_n^n\sin(n+1)\varphi = \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^n\sin\frac{(n+2)\varphi}{2}$.

13. *Să se calculeze următorii radicali:*

a) $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$; *b)* $\sqrt[3]{-2 + 2i}$; *c)* $\sqrt[5]{1 - i}$; *d)* $\sqrt[6]{-i}$.

Soluție. a) Avem: $\sqrt{3} - i = 2\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}\right)$. Notînd $z = \sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$, avem:

$$z = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{4}\right), \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Cele patru valori ale radicalului sînt deci: $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{11\pi}{24} + i \sin \frac{11\pi}{24}\right)$,

$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{23\pi}{24} + i \sin \frac{23\pi}{24}\right)$, $z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{35\pi}{24} + i \sin \frac{35\pi}{24}\right)$, $z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos \frac{47\pi}{24} + i \sin \frac{47\pi}{24}\right)$.

b) Dacă notăm $z = \sqrt[3]{-2 + 2i}$, avem:

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)},$$

$$\text{adică: } z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3}\right), \quad (k = 0, 1, 2).$$

Deci: $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right)$, $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos \frac{19\pi}{12} + \right.$ $\left. + i \sin \frac{19\pi}{12}\right)$.

c) Avem: $1 - i = \sqrt{2}\,(\cos 315° + i \sin 315°)$.

Dacă notăm $z = \sqrt[5]{1 - i}$, rezultă: $z = \sqrt[10]{2}\left(\cos \frac{360°k + 315°}{5} + i \sin \frac{360°k + 315°}{5}\right)$,

$(k = 0, 1, \ldots, 4)$, de unde: $z_1 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 63° + i \sin 63°)$; $z_2 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 135° + i \sin 135°)$; $z_3 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 207° + i \sin 207°)$ $z_4 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 279° + i \sin 279°)$; $z_5 = \sqrt[10]{2}\,(\cos 351° + i \sin 351°)$.

d) Notînd $z = \sqrt[6]{-i}$, avem:

$$z = \sqrt[6]{\cos 270° + i \sin 270°},$$

$$\text{adică: } z = \cos \frac{360°k + 270°}{6} + i \sin \frac{360°k + 270°}{6}$$

sau: $z = \cos (60°k + 45°) + i \sin (60°k + 45°)$, $(k = 0, 1, \ldots, 5)$.

14. ***Dacă notăm cu*** ε_k, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ ***rădăcinile de ordinul n ale unității, să se arate că:***

$$(a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \ldots (a + b\varepsilon_{n-1}) = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

Soluție: Ținînd seama că ε_k, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ sînt rădăcinile de ordinul n ale unității, rezultă că ele sînt rădăcinile ecuației:

$$z^n - 1 = 0.$$

Cu aceasta avem: $z^n - 1 = (z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_1) \ldots (z - \varepsilon_{n-1})$.

Dacă înlocuim în această identitate pe z cu $-\frac{a}{b}$, obținem:

$$(-1)^n \frac{a^n}{b^n} - 1 = (-1)^n \left(\frac{a}{b} + \varepsilon_0\right)\left(\frac{a}{b} + \varepsilon_1\right) \ldots \left(\frac{a}{b} + \varepsilon_{n-1}\right)$$

sau: $(-1)^n (a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \ldots (a + b\varepsilon_{n-1}) = (-1)^n - a^n - b^n$.

Înmulţind ambii membri ai acestei relaţii cu $(-1)^n$, se obţine relaţia cerută.

15. *Să se rezolve următoarele ecuaţii binome:*

a) $(2+i)z^3-3+i=0$; *b)* $(\sqrt{3}-i)z^4-4i=0$; *c)* $5(1-3i)z^5+4(2-i)=0$.

Soluţie. a) Ecuaţia dată se mai poate scrie: $z^3=\frac{3-i}{2+i}$ sau: $z^3=1-i$.

Rădăcinile ecuaţiei sînt: $z=\sqrt[3]{1-i}$.

Avînd în vedere că $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, rezultă că:

$$z=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{7\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{7\pi}{4}}{3}\right),\ (k=0,1,2).$$

Deci cele trei rădăcini căutate sînt: $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)$, $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23\pi}{12}\right)$ sau: $z_1=\left[\frac{\sqrt[6]{2}}{4}[\sqrt{2}-\sqrt{6}+i(\sqrt{2}+\sqrt{6})]\right]$; $z_2=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$; $z_3=\frac{\sqrt[6]{2}}{4}[\sqrt{6}+\sqrt{2}-i(\sqrt{6}-\sqrt{2})]$. *b)* Scriind ecuaţia dată sub forma: $z^4=-1+i\sqrt{3}$, rezultă: $z=\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$, sau, ţinînd seama că $-1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$: $z=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{4}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{2\pi}{3}}{4}\right)$, $(k=0,1,2,3)$.

Cele patru rădăcini sînt deci: $z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; $z_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$; $z_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ sau: $z_1=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$; $z_2=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1+i\sqrt{3})$; $z_3=-\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3}+i)$; $z_4=\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1-i\sqrt{3})$. *c)* Ecuaţia dată se scrie: $z^5=-1-i$, de unde: $z=\sqrt[5]{-1-i}$ sau: $z=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{5}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{5}\right)$ $(k=0,1,2,3,4)$.

Deci: $z_1=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; $z_2=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{20}+i\sin\frac{13\pi}{20}\right)$;

$$z_3=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{20}+i\sin\frac{21\pi}{20}\right);\ z_4=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{20}+i\sin\frac{29\pi}{20}\right);$$

$$z_5=\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{37\pi}{20}+i\sin\frac{37\pi}{20}\right).$$

16. *Să se rezolve ecuaţia:* $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\alpha$, *unde* α *este un număr complex al cărui modul este egal cu* 1.

Soluţie. Notînd cu φ argumentul numărului α, rezultă că ecuaţia dată se scrie:

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Folosind proprietăţi ale proporţiilor, această ecuaţie se mai poate scrie:

$$iz = \frac{\cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n} - 1}{\cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n} + 1}.$$

Amplificînd fracţia din membrul al doilea cu conjugatul numitorului, rezultă: $iz = \dfrac{i\sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}}{1 + \cos\frac{2k\pi + \varphi}{n}}$ sau, avînd în vedere formula $\dfrac{\sin a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$, $z = \operatorname{tg}\dfrac{k\pi + \frac{\varphi}{2}}{n}$, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

De aici rezultă că toate rădăcinile acestei ecuaţii sînt reale.

17. *Să se rezolve ecuaţia:* $z^n - C_n^1 az^{n-1} - C_n^2 a^2 z^{n-2} - \ldots - C_n^n a^n = 0$, *a fiind o constantă complexă nenulă.*

Soluţie. Ecuaţia dată se mai poate scrie: $2z^n - (z^n + C_n^1 az^{n-1} + \ldots + C_n^n a^n) = 0$ sau, ţinînd seama de formula binomului lui Newton: $2z^n - (z + a)^n = 0$.

De aici deducem: $\left(\dfrac{z + a}{z}\right)^n = 2$, adică: $\dfrac{z + a}{z} = \sqrt[n]{2}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}\right)$, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

Din această ecuaţie rezultă: $z = \dfrac{a}{\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1}$

sau: $z = \dfrac{a\left[\sqrt[n]{2}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - 1\right]}{\sqrt[n]{4} + 1 - 2\sqrt[n]{2}\cos\frac{2k\pi}{n}}$, $(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$.

18. *Să se rezolve ecuaţiile: a)* $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$; *b)* $z^8 + (1 - i)z^4 - i = 0$.

Soluţie. a) Dacă notăm $z^3 = w$, obţinem ecuaţia: $w^2 - 9w + 8 = 0$, ale cărei rădăcini sînt: $w_1 = 1$, $w_2 = 8$.

Deci, ecuaţia dată se descompune în două ecuaţii binome: $z^3 - 1 = 0$, $z^3 - 8 = 0$, ale căror rădăcini sînt: $z = \cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}$, $(k = 0, 1, 2)$, respectiv: $z = 2\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$, $(k = 0, 1, 2)$.

Rezultă că ecuaţia dată are rădăcinile: $z_1 = 1$; $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$; $z_4 = 2$; $z_5 = -1 + i\sqrt{3}$; $z_6 = -1 - i\sqrt{3}$. *b)* Notînd $z^4 = t$, obţinem: $t^2 + (1 - i)t - i = 0$, ale cărei rădăcini sînt: $t = \dfrac{i - 1 \pm \sqrt{2i}}{2}$.

Dar: $\sqrt{2i} = 1 + i$, deci: $t_1 = -1$, $t_2 = i$.

Ecuaţia dată se descompune deci în ecuaţiile: $z^4 + 1 = 0$, $z^4 - i = 0$.

Prima ecuaţie se mai poate scrie: $z^4 = \cos\pi + i\sin\pi$, de unde: $z = \cos\dfrac{(2k + 1)\pi}{4} + i\sin\dfrac{(2k + 1)\pi}{4}$, $(k = 0, 1, 2, 3)$.

A doua ecuație se scrie: $z^4 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. De aici rezultă: $z = \cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{4}}{4}$, $(k = 0, 1, 2, 3)$.

Rădăcinile ecuației date sînt deci: $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$; $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$; $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; $z_5 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$; $z_6 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$; $z_7 = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)$; $z_8 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}\right)$.

Exerciții și probleme propuse

1. Să se scrie sub forma trigonometrică următoarele numere complexe:
a) $2(1 - i)$; *b)* $-\sqrt{3} + i$; *c)* $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$; *d)* $1 + i(2 + \sqrt{3})$.

2. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:
a) $1 - \sin\alpha + i(1 + \sin\alpha)$; *b)* $1 + \cos\alpha + i(1 - \cos\alpha)$; *c)* $\sin\alpha + i(1 + \cos\alpha)$.

3. Să se efectueze următoarele operații, punînd numerele complexe sub forma trigonometrică:
a) $1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} - i)[1 + \sin\alpha + i(1 - \sin\alpha)]$;
b) $\frac{(1 - i)(1 - i\sqrt{3})[1 - i(2 - \sqrt{3})]}{(1 + i)(\sqrt{3} + i)[(2 - \sqrt{3}) + i]}$.

4. Să se determine modulele și argumentele următoarelor numere complexe:
$z_1 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12}$; $z_2 = [1 - \cos\alpha - i(1 + \cos\alpha)]^{10}$;
$z_3 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{20}$; $z_4 = \left[\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha + i(1 - \operatorname{tg}\alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha + i(1 + \operatorname{tg}\alpha)}\right]^n$;
$z_5 = \left[\frac{\sin\alpha - i(1 + \cos\alpha)}{1 + \cos\alpha - i\sin\alpha}\right]^n + \left[\frac{\sin\alpha + i(1 - \cos\alpha)}{1 - \cos\alpha + i\sin\alpha}\right]^n$.

5. Știind că $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, să se calculeze expresia: $z^n + \frac{1}{z^n}$.

6. Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale arcului $6x$ în funcție de funcțiile trigonometrice ale arcului x.

7. Să se calculeze radicalii:
a) $\sqrt[5]{-1 - i}$; *b)* $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$; *c)* $\sqrt[4]{i}$; *d)* $\sqrt[3]{1 - i\sqrt{3}}$.

8. Să se demonstreze formulele:

a) $\sin^{2m}\alpha = \frac{1}{2^{2m-1}}\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m+k}C_{2m}^{k}\cos 2(m - k)\alpha + \frac{C_{2m}^{m}}{2^{2m}}$;

b) $\sin^{2m+1}\alpha = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m+k}C_{2m+1}^{k}\sin(2m - 2k + 1)\alpha$.

9. Să se calculeze suma:

$\cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + 2\beta) - \ldots + (-1)^{n-1} \cos[\alpha + (n-1)\beta]$.

10. Să se calculeze suma: $\cos \alpha - C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha - \ldots + (-1)^n C_n^n \cos(n + 1)\alpha$.

11. Dacă notăm cu ε_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) rădăcinile de ordinul n ale unității, să se arate că: $(\varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 \cos\varphi + 1)(\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \cos\varphi + 1) \ldots (\varepsilon_{n-1}^2 - 2\varepsilon_{n-1} \cos\varphi + 1) = 2(1 - \cos n\varphi)$.

12. Să se rezolve ecuațiile binome:

a) $(2 - i)z^3 - 1 - 2i = 0$; *b)* $(\sqrt{3} + i)z^4 + 4i = 0$; *c)* $(1 + i\sqrt{3})x^4 - 2(\sqrt{3} + i) = 0$.

13. Să se rezolve ecuațiile: *a)* $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$; *b)* $(z-i)^n - (z+i)^n = 0$.

14. Să se arate că, dacă numerele m și n sînt prime între ele, ecuațiile $z^m - 1 = 0$ și $z^n - 1 = 0$ au o singură rădăcină comună.

15. Să se rezolve ecuațiile: *a)* $z^6 - 9iz^3 - 8 = 0$; *b)* $z^8 - 97z^4 + 1\,296 = 0$.

16. Să se determine valorile sumelor: $S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots$ $S_2 = C_n^1 - C_3^n + C_n^5 \ldots$

Indicație. Se calculează în două moduri puterea a *n*-a a numărului $1 + i$.

17. Să se arate că: $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$, $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$.

Indicație. Se face suma rădăcinilor ecuației $z^n - 1 = 0$.

18. Să se afle poziția celui de-al treilea vîrf al triunghiului echilateral ale cărui vîrfuri sînt: $z_1 = 1$, $z_2 = 2 + i$.

Capitolul **6**

Aplicațiile trigonometriei în geometrie

În acest capitol vom nota laturile unui triunghi ABC cu a, b, c, aria cu S, raza cercului circumscris cu R, raza cercului înscris cu r, semiperimetrul cu p. Dacă triunghiul este dreptunghic, notăm unghiul drept cu A.

Într-un triunghi dreptunghic avem următoarele relații:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}, \ \sin C = \cos B = \frac{c}{a}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}, \ \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}, \tag{2}$$

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{3}$$

Într-un triunghi oarecare avem următoarele relații:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{C}{\sin C} = 2R \text{ (teorema sinusurilor);} \tag{4}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ (teorema cosinusurilor);} \tag{5}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \quad \text{(teorema tangentelor);} \tag{6}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \ \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \ \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \tag{7}$$

$$S = \frac{bc \sin A}{2}; \tag{8}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (formula lui Heron);} \tag{9}$$

$$r = \frac{S}{p}; \quad (10) \qquad R = \frac{abc}{4S}. \tag{11}$$

Cazurile principale de rezolvare a triunghiurilor dreptunghice sînt:

1° se dau ipotenuza și un unghi ascuțit;
2° se dau o catetă și un unghi ascuțit
3° se dau ipotenuza și o catetă;
4° se dau cele două catete.

Cazurile principale de rezolvare a triunghiurilor oarecare sînt:

1° se dau două unghiuri şi o latură;
2° se dau două laturi şi unghiul cuprins între ele;
3° se dau două laturi şi unghiul opus uneia dintre ele;
4° se dau cele trei laturi.

Exerciţii şi probleme rezolvate

1. *Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relaţiile:*

$$1^\circ\ b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C;\quad 2^\circ\ (1+\cos B)(1+\cos C) = \frac{2p^2}{a^2};\quad 3^\circ\ \cos(2C-B) = \frac{c}{a^3}(3a^2-4c^2).$$

Soluţie. Pentru a demonstra relaţiile date vom folosi formulele:

$$\sin B = \frac{b}{a},\ \sin C = \frac{c}{a},\ \cos B = \frac{c}{a},\ \cos C = \frac{b}{a}.$$

În cazul 1°, avem: $b\cos B + c\cos B = \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} = \frac{2bc}{a}$, $2a\sin B\sin C = 2a\cdot\frac{b}{a}\ \frac{c}{a} = \frac{2bc}{a}$.

În cazul 2°, avem: $(1+\cos B)(1+\cos C) = \left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right) = \frac{(a+c)(a+b)}{a^2} =$

$$= \frac{a^2+a(b+c)+bc}{a^2} = \frac{2a^2+2a(b+c)+2bc}{2a^2}.$$

Dar $a^2 = b^2+c^2$, deci: $(1+\cos B)(1+\cos C) = \frac{a^2+2a(b+c)+b^2+2bc+c^2}{2a^2} =$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{2a^3} = \frac{4p^2}{2a^2} = \frac{2p^2}{a^2}.$$

În cazul 3°, avem: $\cos(2C-B) = \cos 2C\cos B + \sin 2C\sin B = \cos B(\cos^2 C - \sin^2 C) +$
$+ 2\sin B\sin C\cos C = \frac{c}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c^2}{a^2}\right) + 2\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{a}\cdot\frac{b}{a} = \frac{c(3b^2-c^2)}{a^3}$. Dar $b^2 = a^2-c^2$, deci:

$$\cos(2C-B) = \frac{c(3a^2-4c^2)}{a^3}.$$

2. *Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relaţiile:* $1^\circ\ \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2} = \frac{2(b^3+c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$; $2^\circ\ \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{B}{2}+\mathrm{tg}\frac{C}{2}} - \frac{1}{\mathrm{ctg}\frac{B}{2}+\mathrm{ctg}\frac{C}{2}} = 1.$

Soluţie. 1° Avînd în vedere că într-un triunghi dreptunghic avem $\cos B = \frac{c}{a}$, $\cos C = \frac{b}{a}$, rezultă:

$$\mathrm{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos B}{1+\cos B}} = \sqrt{\frac{1-\frac{c}{a}}{1+\frac{c}{a}}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}=\sqrt{\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

deci: $\operatorname{tg}^2\frac{B}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{C}{2}=\frac{a-c}{a+c}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{2(a^2-bc)}{(a+b)(a+c)}=\frac{2(a^2-bc)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

Dar $a^2=b^2+c^2$, deci: $(a^2-bc)(b+c)=(b^2+c^2-bc)(b+c)=b^3+c^3$.

2° Avem: $\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{90^\circ}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$,

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=\frac{\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{90^\circ}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}},$$

deci: $\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{B}{2}+\operatorname{tg}\frac{C}{2}}-\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}}=\frac{2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sqrt{2}}-\frac{2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\right.$

$\left.-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot\cos\frac{90^\circ}{2}=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$

3. *Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile:*

1° $\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}-\frac{r}{a}$; 2° $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p}$.

Soluție. 1° Avem: $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{2}=\frac{1-\frac{c}{a}}{2}=\frac{a-c}{2a}$, $\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}=\frac{1-\frac{b}{a}}{2}=\frac{a-b}{2a}$, deci: $\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=\frac{a-c+a-b}{2a}=\frac{2a-b-c}{2a}$. Dar: $r=\frac{S}{p}=$

$=\frac{\frac{bc}{2}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{bc}{a+b+c}$, de unde deducem că: $\frac{1}{2}-\frac{r}{a}=\frac{a-2r}{2a}=\frac{a-\frac{2bc}{a+b+c}}{2a}=$

$=\frac{a^2+a(b+c)-2bc}{2a(a+b+c)}=\frac{a^2-(b^2+c^2)+a(b+c)-2bc}{2a(a+b+c)}=\frac{2a^2+a(b+c)-(b+c)^2}{2a(a+b+c)}=$

$=\frac{a^2+a(b+c)+a^2-(b+c)^2}{2a(a+b+c)}=\frac{a(a+b+c)+(a+b+c)(a-b-c)}{2a(a+b+c)}=\frac{2a-b-c}{2a}$.

2° Avem: $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{\sin B}{1+\cos B}=\frac{b}{a+c}$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\sin C}{1+\cos C}=\frac{c}{a+b}$, deci: $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=$

$=\frac{bc}{(a+b)(a+c)}=\frac{2bc}{2a^2+2a(b+c)+2bc}=\frac{2bc}{a^2+2a(b+c)+b^2+2bc+c^2}=\frac{2bc}{(a+b+c)^2}=$

$$=\frac{4S}{4p^2}=\frac{4pr}{4p^2}=\frac{r}{p}.$$

4. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care:* $b = 32$, $\frac{B}{C} = \frac{7}{5}$.

Soluţie. Ţinînd seama că $C = 90° - B$, relaţia dată se scrie: $\frac{B}{90° - B} = \frac{7}{5}$, de unde: $B = 52°30'$ şi: $C = 37°30'$. Din formulele: $a = \frac{b}{\sin B}$, $c = b \operatorname{ctg} B$, deducem: $a = 40{,}33$, $c = 24{,}55$.

5. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care:* $c = 120$, $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$.

Soluţie. Din formula $\sin B = \frac{b}{a}$, rezultă: $\lg \sin B = \lg 0{,}6$, adică: $\lg \sin B = \overline{1}{,}77815$. De aici deducem: $B = 36°52'11''$ şi deci: $C = 53°7'49''$. Din $b = c \operatorname{tg} B$, rezultă: $\lg b = \lg 120 + \lg \operatorname{tg} 36°52'11''$. Dar: $\lg 120 = 2{,}07918$; $\lg \operatorname{tg} 36°52'11'' = \overline{1}{,}87506$, deci: $\lg b = 1{,}95424$, de unde: $b = 90$. Din $a = \frac{5b}{3}$ deducem: $a = 150$.

6. *Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscînd perimetrul $2p$ şi unghiul ascuţit B. Aplicaţie:* $p = 30$, $B = 17°$.

Soluţie. Avem $C = 90° - B$.

Avînd în vedere că $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, rezultă: $a(1 + \sin B + \cos B) = 2p$, de unde:

$$a = \frac{2p}{1 + \sin B + \cos B}.$$

Cu această valoare determinăm pe b şi c.

Pentru a putea face calculele cu ajutorul logaritmilor, să transformăm în produs expresia $1 + \sin B + \cos B$.

Avem: $1 + \cos B = 2\cos^2 \frac{B}{2}$, $\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$, deci: $1 + \sin B + \cos B =$

$$= 2\cos\frac{B}{2}\left(\sin\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\right) = 2\cos\frac{B}{2}\left[\sin\frac{B}{2} + \sin\left(90° - \frac{B}{2}\right)\right] =$$

$$= 4 \cos\frac{B}{2} \sin 45° \cos\left(45° - \frac{B}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\left(45° - \frac{B}{2}\right).$$

Rezultă că: $a = \frac{p}{\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\cos\left(45° - \frac{B}{2}\right)}$. În cazul numeric dat avem: $a = \frac{30}{\sqrt{2}\cos 8°30' \cos 36°30'}$, deci: $\lg a = \lg 30 + \frac{1}{2}\operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} \cos 8°30' + \operatorname{colg} \cos 36°30'$.

Dar: $\lg 30 = 1{,}47712$, $\frac{1}{2}\lg 2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}30103 = 0{,}15051$, $\frac{1}{2}\operatorname{colg} 2 = \overline{1}{,}84949$, $\lg \cos 8°30' = \overline{1}{,}99520$, $\operatorname{colg} \cos 8°30' = 0{,}00480$. $\lg \cos 36°30' = \overline{1}{,}90518$, $\operatorname{colg} \cos 36°30' = 0{,}094482$, deci: $\lg a = 1{,}42623$, de unde: $a = 26{,}68$.

Din $b = a \sin B$ deducem: $\lg b = \lg a + \lg \sin B$, sau, avînd în vedere că: $\lg \sin 17° = \overline{1}{,}46594$, obţinem: $\lg b = 0{,}89217$, adică: $b = 7{,}80$.

Ţinînd seama că $a + b + c = 60$, rezultă: $c = 25{,}52$.

7. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care sînt cunoscute ipotenuza a şi suma m a catetelor. Discuţie. Să se facă efectiv calculele în cazul:* $a = 13{,}56$, $m = 16{,}48$.

Soluţie. Avînd în vedere că $b = a \sin B$ şi $c = a \cos B$, deducem: $a \sin B + a \cos B = m$, adică: $\sin B + \cos B = \frac{m}{a}$.

Dar $\cos B = \sin(90° - B)$, deci: $\sin B = \sin(90° - B) = 2 \sin 45° \cos(B - 45°) = \frac{m}{a}$,

de unde rezultă: $\cos(B - 45°) = \frac{m}{a\sqrt{2}}$.

Ținînd seama că $0° < B < 90°$, rezultă: $-45° < B - 45° < 45°$ și deci trebuie să avem:

$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(B - 45°) \leqslant 1$, adică: $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{a\sqrt{2}} \leqslant 1$.

De aici deducem:

$$a < m \leqslant a\sqrt{2},$$

care este condiția de posibilitate a problemei. (2)

Presupunînd această condiție satisfăcută, din ecuația (1) rezultă: $B - 45° = \pm \alpha$, $\left(\cos \alpha = \frac{m}{a\sqrt{2}}\right)$, adică: $B = 45° + \alpha, C = 45° - \alpha$.

Valorile lui b și c rezultă din formulele $b = a \sin B$, $c = a \cos B$.

În cazul numeric dat, condiția (2) este satisfăcută. Avem:

$$\cos(B - 45°) = \frac{16,48}{13,56\sqrt{2}},$$

de unde: $\lg \cos(B - 45°) = \lg 16,48 + \operatorname{colg} 13,56 + \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 = 1,21696 + \overline{2},86774 + \overline{1},84949 =$

$= \overline{1},93419$.

De aici deducem: $B - 45° = 30°45'$, adică: $B = 75°45'$ și deci: $C = 14°15'$.

Cu aceste valori găsim: $b = 13,14$, $c = 3,34$.

8. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care se dă înălțimea h corespunzătoare ipotenuzei și unghiul ascuțit B. Aplicație: $h = 10,56$, $B = 34°26'$.*

Soluție. Avem $C = 90° - B$.

Dacă notăm cu H proiecția vîrfului A pe ipotenuza BC, atunci din triunghiul dreptunghic AHB deducem: $c = \frac{h}{\sin B}$. Cu această valoare avem: $a = \frac{c}{\cos B} = \frac{h}{\sin B \cos B} = \frac{2h}{\sin 2B}$.

Din triunghiul dreptunghic AHC găsim: $b = \frac{h}{\cos B}$. În cazul numeric dat avem: $\lg b =$ $= \lg 10,56 + \operatorname{colg} \cos 34°26' = 1,02366 + 0,08357 = 1,10723$, de unde: $b = 12,80$. În același mod găsim: $c = 18,68$, $a = 22,65$.

9. *Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care se dă perimetrul $2p$ și raza cercului înscris r. Discuție. Să se facă efectiv calculele în cazul $p = 18,42$, $r = 2,76$.*

Soluție. Să demonstrăm întîi următoarea relație: $b + c = a + 2r$. (1)

Pentru aceasta să notăm cu I centrul cercului înscris în triunghiul ABC și cu A', B', C' punctele de tangență ale acestuia (fig. VI, 1). Avînd în vedere că dreapta AI este bisectoarea unghiului A, rezultă că triunghiurile $AB'I$ și $AC'I$ sînt dreptunghice isoscele, deci:

$$AB' = AC' = r.$$

Pe de altă parte, avem $BA' = BC'$ și $CA' = CB'$, de unde rezultă:

$$b + c = (AB' + CB') + (AC' + BC') = r + CA' + r + BA' = 2r + a.$$

Din relația (1) deducem: $a + b + c = 2a + 2r$, adică: $p = a + r$.

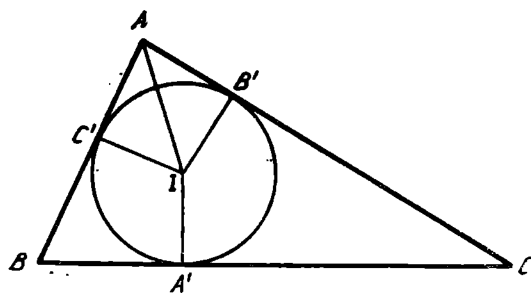


Fig. VI, 1

De aici rezultă: $a = p - r$.
Înlocuind în relaţia (1) $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, găsim: $a(\sin B + \cos B) = a + 2r$.

$$\text{sau: } \sin B + \cos B = \frac{p+r}{p-r}.$$

Înlocuind aici pe $\cos B$ cu $\sin(90° - B)$ şi transformînd suma în produs obţinem:

$$2 \sin 45° \cos(B - 45°) = \frac{p+r}{p-r}, \text{ adică: } \cos(B - 45°) = \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}}, \quad (2)$$

Ţinînd seama că $0° < B < 90°$, rezultă: $-45° < B - 45° < 45°$, de unde rezultă:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(B - 45°) \leqslant 1, \text{ adică: } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}} \leqslant 1.$$

De aici deducem: $p - r < p + r \leqslant (p - r)\sqrt{2}$.

Prima parte a inegalităţii este evidentă, iar din a doua deducem: $r \leqslant \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} p$, sau:

$$r \leqslant (3 - 2\sqrt{2})p, \quad (3)$$

care reprezintă condiţia de posibilitate a problemei.

Presupunînd această condiţie satisfăcută şi notînd cu α cel mai mic unghi pozitiv pentru care $\cos\alpha = \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}}$, din (2) găsim: $B = 45° + \alpha$ şi deci:

$$C = 45° - \alpha^*.$$

Cu aceste valori calculăm catetele b şi c cu formulele: $b = a \sin B$, $c = a \cos B$. Dacă $r = (3 - 2\sqrt{2})p$ avem $\alpha = 0$ şi triunghiul este dreptunghic isoscel.

În cazul numeric condiţia (3) este satisfăcută şi avem: $\cos(B - 45°) = \frac{21{,}18}{15{,}66\sqrt{2}}$,

adică: $\lg \cos(B - 45°) = \lg 21{,}18 + \operatorname{colg} 15{,}66 + \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 = 1{,}32593 + \bar{2}{,}80521 + \bar{1}{,}84949 = \bar{1}{,}98063$.

De aici rezultă: $B - 45° = 16°59'$, deci: $B = 61°59'$ şi $C = 28°1'$.
De asemenea, avem: $a = p - r = 15{,}66$.
Din formulele $b = a \sin B$, $c = a \cos B$ deducem: $b = 13{,}825$, $c = 7{,}355$. Se verifică că $a + b + c = 2p$.

10. *Se consideră un triunghi ABC, dreptunghic în A, în care:* $\frac{a+b}{c} = k$, (k=const.). *Se cere să se calculeze* $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. *Pentru ce valori ale lui k unghiul B este cel mai mic unghi al triunghiului?*

Soluţie. Înlocuind în relaţia dată $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, obţinem: $\frac{1 + \sin B}{\cos B} = k$.

Ţinînd seama că $\sin B = \cos(90° - B)$, $\cos B = \sin(90° - B)$, această relaţie se poate scrie sub forma: $\frac{1 + \cos(90° - B)}{\sin(90° - B)} = k$, sau, avînd în vedere formula $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$:
$\operatorname{ctg}\frac{90° - B}{2} = k$, adică: $\operatorname{ctg}\left(45° - \frac{B}{2}\right) = k$.

Dezvoltînd expresia din membrul întîi, obţinem: $\frac{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + 1}{\operatorname{ctg}\frac{B}{2} - 1} = k$. De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg}\frac{B}{2} = \frac{k+1}{k-1}, \text{ de unde:}$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{k-1}{k+1}, \quad (1)$$

---

* Dacă luăm $B = 45° - \alpha$, găsim $C = 45° + \alpha$, adică acelaşi triunghi.

Pentru ca unghiul B să fie cel mai mic unghi al triunghiului ABC, trebuie ca $B < 45°$, adică: $0 < \text{tg } B < 1$. Dar, ţinînd seama de formula (1), găsim: $\text{tg } B = \frac{k^2 - 1}{2k}$, deci condiţia de mai sus se scrie: $0 < \frac{k^2 - 1}{2k} < 1$.

Avînd în vedere că $k > 0$, această inegalitate se descompune în inegalităţile: $k^2 - 1 > 0$, $k^2 - 2k - 1 < 0$. De aici rezultă: $1 < k < 1 + \sqrt{2}$.

11. *Să se demonstreze că triunghiul ABC, în care avem relaţia:* $\sin B \text{ tg } B = \frac{b^2}{ac}$ *este dreptunghic.*

Soluţie. Relaţia dată se mai poate scrie: $\frac{\sin^2 B}{\cos B} = \frac{b^2}{ac}$.

Din teorema sinusurilor avem: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$.

Înlocuind aceste valori în relaţia de mai sus obţinem: $\frac{\sin^2 B}{\cos B} = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C}$, sau: $\sin A \sin C = \cos B$.

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferenţă, găsim: $\cos (A - C) - \cos (A + C) = 2 \cos B$.

Dar $A + C = 180° - B$, deci $\cos (A + C) = - \cos B$. Rezultă că relaţia dată devine: $\cos (A - C) = \cos B$, de unde: $A - C = \pm B$.

Deci $A = B + C$ sau $C = A + B$, adică $A = 90°$ sau $C = 90°$.

Triunghiul este dreptunghic în B sau în C.

12. *Să se demonstreze că triunghiul ABC, în care avem:*

$$1 + \text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1 - \text{ctg} C}$$ *este dreptunghic.*

Soluţie. Ţinînd seama că $\text{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$, rezultă: $\text{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) =$

$$= \frac{\text{ctg} \frac{\pi}{4} \text{ctg} B + 1}{\text{ctg} B - \text{ctg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\text{ctg} B + 1}{\text{ctg} B - 1}$$ şi relaţia dată se scrie: $1 + \frac{\text{ctg} B + 1}{\text{ctg} B - 1} = \frac{2}{1 - \text{ctg } C}$, de unde deducem: $\text{ctg } B \text{ ctg } C = 1$, sau: $\cos B \cos C = \sin B \sin C$.

De aici rezultă: $\cos (B + C) = 0$,

adică, avînd în vedere că B şi C sînt unghiuri ale unui triunghi, $B + C = \frac{\pi}{2}$ şi deci triunghiul este dreptunghic în A.

13. *Să se demonstreze că dacă:* $\frac{b^2}{\text{tg } B} + \frac{c^2}{\text{tg } C} = 4S$, *atunci triunghiul ABC este dreptunghic.*

Soluţie. Relaţia dată se mai poate scrie: $\frac{b^2 \cos B}{\sin B} + \frac{c^2 \cos C}{\sin C} = 4S$.

Dar: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ şi $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$, deci obţinem: $b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{4 Sabc}{R}$. Avînd în vedere că: $R = \frac{abc}{4S}$ şi $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$, relaţia dată devine: $a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 = (a + b + c)(- a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)$, adică: $a^2 = b^2 + c^2$.

14. *Să se demonstreze că triunghiul ABC în care*

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$$

este dreptunghic sau isoscel.

Soluție. Relația dată se mai poate scrie: $\sin B - \sin C = \cos C - \cos B$, sau, transformînd diferențele în produse: $2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}$.

De aici rezultă: $\sin \frac{B-C}{2}\left(\cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2}\right) = 0$. Dacă: $\sin \frac{B-C}{2} = 0$, avem: $B - C = 0$ și triunghiul este isoscel.

Dacă: $\cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2} = 0$, rezultă: $\operatorname{tg} \frac{B+C}{2} = 1$, $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4}$, de unde $A = \frac{\pi}{2}$

15. *Să se arate că triunghiul ABC în care:*

$$\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$$

este isoscel.

Soluție. Înmulțind ambii membri ai egalității date cu $2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$, produs care este nenul pentru că $\frac{A}{2} \neq 90°$, $\frac{B}{2} \neq 90°$, obținem: $\sin A \cos^4 \frac{B}{2} = \sin B \cos^4 \frac{A}{2}$.

Dar $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}$, deci: $\sin A\,(1 + \cos B)^2 = \sin B\,(1 + \cos A)^2$

sau, înlocuind pe $\cos^2 B$ cu $1 - \sin^2 B$ și pe $\cos^2 A$ cu $1 - \sin^2 A$, $2(\sin A \cos B - \sin B \cos A) + 2(\sin A - \sin B) + \sin A \sin B (\sin A - \sin B) = 0$, care se mai poate scrie: $2 \sin (A - B) + (\sin A - \sin B)\,(2 + \sin A \sin B) = 0$.

Avînd în vedere că: $\sin (A - B) = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, $\sin A - \sin B = 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$, relația de mai sus se scrie: $\sin \frac{A-B}{2}\left(2 \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} + \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2}\right) = 0$.

Dar: $\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$, $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, $\sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$, $\cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$, deci egalitatea dată devine:

$$\sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}\left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}\right) = 0.$$

Factorii $\cos \frac{A}{2}$ și $\cos \frac{B}{2}$ nu pot fi nuli; avînd în vedere că A, B, C sînt unghiuri ale unui triunghi rezultă că $\sin \frac{A}{2} > 0$, $\sin \frac{B}{2} > 0$, $\sin \frac{C}{2} > 0$, deci: $1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1$.

Rezultă că relația dată este echivalentă cu: $\sin \frac{A-B}{2} = 0$, deci cu: $A - B = 0$ și triunghiul este isoscel.

16. *Să se arate că triunghiul ABC, în care:* $c^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 4S$ *este isoscel.*

Soluţie. Avem: $\operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$ şi $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, deci relaţia dată se scrie: $c^2\sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

adică: $c^2 = 4(p-a)(p-b)$, sau: $c^2 = (-a+b+c)(a-b+c)$.

De aici deducem: $c^2 = c^2 - (a-b)^2$, deci: $a = b$.

17. *Să se determine forma triunghiului ABC, în care:*

$$8 \sin A \sin B \cos C + 1 = 0.$$

Soluţie. Avînd în vedere că: $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ şi că $\cos(A+B) = -\cos C$, rezultă că relaţia dată se mai poate scrie: $4\cos C[\cos(A-B) + \cos C] + 1 = 0$, sau, înlocuind pe 1 cu $\cos^2(A-B) + \sin^2(A-B)$, $4\cos^2 C + 4\cos C\cos(A-B) + \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) = 0$, adică $[2\cos C + \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0$.

De aici deducem: $\sin(A-B) = 0$, $2\cos C + \cos(A-B) = 0$.

Prima relaţie ne dă $A = B$. Cu aceasta, a doua relaţie devine: $\cos C = -\frac{1}{2}$, deci: $C=120°$.

De aici rezultă că: $A = B = 30°$.

Triunghiul ABC este deci un triunghi isoscel, avînd unghiurile egale de cîte 30°.

18. *Să se arate că dacă:* $\frac{a^3+b^3+c^3}{p} = 2c^2$, $\sin A \sin B = \sin^2 C$, *triunghiul ABC este echilateral.*

Soluţie. Prima relaţie se mai poate scrie: $a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b+c)$, sau: $(a+b)(a^2 - ab + b^2 - c^2) = 0$. De aici deducem: $a^2 + b^2 = ab + c^2$. Dar: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, deci: $\cos C = \frac{1}{2}$, adică: $C = 60°$.

Cu această valoare, a doua relaţie dată devine: $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$.

Transformînd produsul de sinusuri în sumă, găsim: $\cos(A-B) - \cos(A+B) = \frac{3}{2}$, sau, avînd în vedere că $A + B = 120°$, $\cos(A-B) = 1$, deci $A - B = 0$. De aici rezultă că $A = B = C = 60°$.

19. *Să se arate că un triunghi ABC, în care:* $8\cos A\cos B\cos C = 1$ *este echilateral.*

Soluţie. Ţinînd seama de formulele de transformare ale unui produs de cosinusuri în sumă rezultă: $2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ sau, avînd în vedere că $\cos(A+B) = -\cos C$: $2\cos A\cos B = \cos(A-B) - \cos C$. Cu aceasta, relaţia dată se scrie: $4\cos C[\cos(A-B) - \cos C] = 1$ sau, înlocuind pe 1 cu $\sin^2(A-B) + \cos^2(A-B)$, $4\cos^2 C - 4\cos C\cos(A-B) + \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) = 0$, adică: $[2\cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0$.

Dar o sumă de pătrate este nulă numai dacă fiecare termen al sumei este nul, deci: $\sin(A-B) = 0$, $2\cos C - \cos(A-B) = 0$.

Din prima relaţie deducem $A = B$, care înlocuită în a doua ne dă: $\cos C = \frac{1}{2}$.

Rezultă că $C = 60°$ şi deci $A + B = 120°$, de unde $A = B = 60°$.
Triunghiul este deci echilateral.

20. *Să se determine forma triunghiului ABC, în care avem relaţia:*

$$\operatorname{tg} 2B + \sec 2B = \frac{c+b}{c-b},$$

Soluție. Relația dată se mai poate scrie: $\frac{\sin 2B + 1}{\cos 2B} = \frac{c+b}{c-b}$ sau : $\frac{1 + 2\sin B\cos B}{1 - 2\sin^2 B} = \frac{c+b}{c-b}$. Avînd în vedere că $b = 2R \sin B$ și $c = 2R \sin C$, deducem: $\frac{1 + 2\sin B\cos B}{1 - 2\sin^2 B} = \frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B}$.

Scăzînd numitorii din numărători și lăsînd numitorii neschimbați găsim:

$$\frac{2\sin B(\sin B + \cos B)}{1 - 2\sin^2 B} = \frac{2\sin B}{\sin C - \sin B},$$

sau, simplificînd cu $2\sin B \neq 0$, $(\sin B + \cos B)(\sin C - \sin B) = 1 - 2\sin^2 B$, sau încă: $(\sin B + \cos B)(\sin C - \cos B) = 0$.

Dacă $\sin B + \cos B = 0$, rezultă $\operatorname{tg} B = -1$, adică $B = 135°$ și relația dată n-are sens.

Deci relația dată se reduce la: $\sin C - \cos B = 0$ sau: $\cos B = \cos(90° - C)$. De aici rezultă: $B = \pm(90° - C)$. Deci: $B + C = 90°$, sau:
$C - B = 90°$. Rezultă că triunghiul ABC este sau dreptunghic în A sau are $C - B = 90°$.

21. *Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:*

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = 0.$$

Soluție. Ținînd seama de teorema cosinusului rezultă:

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} = \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{-a+b+c}{2}} = \frac{b(a^2+c^2-b^2) - c(a^2+b^2-c^2)}{abc(-a+b+c)} =$$

$$= \frac{a^2(b-c) - bc(b-c) - (b-c)(b^2+bc+c^2)}{abc(-a+b+c)} = \frac{(b-c)[a^2-(b+c)^2]}{abc(-a+b+c)} =$$

$$= \frac{(b-c)(a-b-c)(a+b+c)}{abc(-a+b+c)} = \frac{2p(c-b)}{abc}.$$

Analog, avem: $\frac{\cos C - \cos A}{p-b} = \frac{2p(a-c)}{abc}$, $\frac{\cos A - \cos B}{p-c} = \frac{2p(b-a)}{abc}$.

Cu aceste valori avem:

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c} = \frac{2p}{abc}(c - b + a - c + b - a) = 0.$$

22. *Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relația:*

$$(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} + (c+a)\operatorname{tg}\frac{C-A}{2} + (a+b)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} = 0.$$

Soluție. Ținînd seama că: $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, rezultă că: $(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = 2R(\sin B + \sin C)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}$ sau, transformînd suma de sinusuri în produs:

$$(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = 4R\sin\frac{B+C}{2}\sin\frac{B-C}{2}.$$

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri găsim:

$$(b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = 2R(\cos C - \cos B).$$

Analog, avem: $(c + a)\operatorname{tg}\frac{C-A}{2} = 2R(\cos A - \cos C)$; $(a + b)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} =$

$$= 2R(\cos B - \cos A) \text{ deci: } (b+c)\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} + (c+a)\operatorname{tg}\frac{C-A}{2} + (a+b)\operatorname{tg}\frac{A-B}{2} =$$

$$= 2R(\cos C - \cos B + \cos A - \cos C + \cos B - \cos A) = 0.$$

23. *Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relația:* $a^2 - b^2 = 2S(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$.

Soluție. Avem relația: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Dar: $S = \frac{bc\sin A}{2}$, deci: $bc = \frac{2S}{\sin A}$. Cu această expresie, relația de mai sus se scrie: $a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{ctg} A$. Analog, avem: $b^2 = a^2 + c^2 - 4S\operatorname{ctg} B$.

Scăzînd aceste două relații rezultă: $a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 4S(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$ sau: $2(a^2 - b^2) = 4S(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$.

24. *Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:*

$$a^2 = b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B - C).$$

Soluție. Avem: $b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B - C) = b^2(1 - 2\sin^2 C) + c^2(1 - 2\sin^2 B) + 2bc(\cos B\cos C + \sin B\sin C) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A + 2bc\cos A - 2b^2\sin^2 C - 2c^2\sin^2 B + 2bc(\cos B\cos C + \sin B\sin C)$. Dar: $b^2 + c^2 - 2bc\cos A = a^2$ și: $2bc\cos A = -2bc\cos(B + C) = -2bc(\cos B\cos C - \sin B\sin C)$.

Cu aceste valori, obținem:

$$b^2\cos 2C + c^2\cos 2B + 2bc\cos(B - C) = a^2 - 2bc(\cos B\cos C - \sin B\sin C) + 2bc(\cos B\cos C + \sin B\sin C) - 2b^2\sin^2 C - 2c^2\sin^2 B = a^2 - 2b^2\sin^2 C + 4bc\sin B\sin C - 2c^2\sin^2 B = a^2 - (b\sin C - c\sin B)^2 = a^2.$$

25. *Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relațiile:*

1° $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$, 2° $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p}{4R}$.

Soluție. 1° Ținînd seama de formulele:

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},\ \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\text{rezultă: } \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. \tag{1}$$

$$\text{Dar: } (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} \text{ și: } abc = 4RS.$$

Cu aceste valori, avem: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{\frac{S^2}{p}}{4RS} = \frac{S}{4Rp} = \frac{pr}{4Rp} = \frac{r}{4R}$.

2° Avem: $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$; $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$. Cu aceste valori: $\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{pS}{4RS} = \frac{p}{4R}$.

26. *Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relațiile:*

1° $\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}$, 2° $\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R}$,

3° $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=p+\frac{S}{R}$.

Soluție. 1° Ținînd seama că: $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$, $\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$, $\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$,

rezultă că: $\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{a}+\frac{\cos^2\frac{B}{2}}{b}+\frac{\cos^2\frac{C}{2}}{c}=\frac{p}{abc}(p-a+p-b+p-c)=\frac{p}{abc}(3p-2p)=\frac{p^2}{abc}$.

2° Avem: $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$, $\cos^2\frac{B}{2}=\frac{1+\cos B}{2}$, $\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1+\cos C}{2}$, (1)

deci: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(3+\cos A+\cos B+\cos C)$.

Dar: $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$, de unde: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+$ $+\cos^2\frac{C}{2}=2\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$,

Avînd în vedere că:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\quad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}},\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

rezultă: $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=\frac{\frac{S^2}{p}}{4RS}=\frac{S}{4pR}=\frac{pr}{4pR}=\frac{r}{4R}$,

deci: $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\left(1+\frac{r}{4R}\right)=2+\frac{r}{2R}$.

3° Folosind formulele (1) rezultă: $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}(a+b+c+$ $+a\cos A+b\cos B+c\cos C)=\frac{1}{2}(2p+a\cos A+b\cos B+c\cos C)$.

Avînd în vedere formulele $a=2R\sin A$ etc., deducem: $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=$ $=p+R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)=p+\frac{R}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$.

Dar $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$, deci: $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+$ $+c\cos^2\frac{C}{2}=p+2R\sin A\sin B\sin C=p+2R\cdot\frac{a}{2R}\cdot\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}=p+\frac{abc}{4R^2}=p+\frac{4RS}{4R^2}=p+\frac{S}{R}$.

27. *Dacă l, m și n sînt distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului ABC la laturile triunghiului, atunci:*

$$4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=\frac{abc}{lmn}.$$

Soluție. Fie L, M, N proiecțiile punctului O pe laturile BC, AC, AB.

Avem: $\widehat{COL}=A$, $\widehat{AOM}=B$, $\widehat{BON}=C$,

deci: $l=R\cos A$, $m=R\cos B$, $n=R\cos C$.

Cu aceste valori, avem: $4\left(\frac{a}{l}+\frac{b}{m}+\frac{c}{n}\right)=4\left(\frac{a}{R\cos A}+\frac{b}{R\cos B}+\frac{c}{R\cos C}\right)$.

Ținînd seama aici că: $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, rezultă:

$$4\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n}\right) = 8\ (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C).$$

Dar: $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$, deci: $4\left(\frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n}\right) = 8 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C =$

$$= 8\frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C}{R \cos A \cdot R \cos B \cdot R \cos C} = \frac{abc}{lmn}.$$

28. *Să se determine unghiurile unui triunghi ABC ale cărui laturi sînt proporționale cu numerele* $1 + \sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, 2.

Soluție. Avînd în vedere că: $a = (1 + \sqrt{3})k$, $b = \sqrt{6}\,k$, $c = 2k$, teorema cosinusului, scrisă pentru fiecare dintre laturile triunghiului, ne dă: $\cos A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, $\cos B = \frac{1}{2}$, $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

Unghiurile triunghiului sînt deci: $A = 75°$, $B = 60°$, $C = 45°$.

29. *Știind că* $a = \frac{7c}{3}$, $b = \frac{8c}{3}$, *să se determine valoarea unghiului A.*

Soluție. Scriind teorema cosinusului corespunzătoare laturii a, obținem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{64c^2}{9} + c^2 - \frac{49c^2}{9}}{\frac{16c^2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

De aici rezultă: $A = 60°$.

30. *Să se rezolve triunghiul ABC, în care:* $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Soluție. Avem: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}} = \frac{1}{2}.$

De aici rezultă: $A = 60°$.

Din teorema sinusului deducem: $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, adică: $B = 45°$. Deci: $C = 180° - (A + B) = 75°$.

31. *Să se rezolve triunghiul ABC în care sînt date laturile b și c și lungimea l a bisectoarei unghiului A. Discuție. Aplicație:* $b = 54$, $c = 41$, $l = 37$.

Soluție. Dacă notăm cu D piciorul bisectoarei unghiului A, atunci avem:

$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}$, adică: $bc \sin A = bl \sin\frac{A}{2} + cl \sin\frac{A}{2}$. Dar: $\sin A = 2 \sin\frac{A}{2} \cos\frac{A}{2}$,

deci de aici deducem: $2bc \cos\frac{A}{2} = l(b + c)$ sau: $\cos\frac{A}{2} = \frac{l(b + c)}{2bc}$.

Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca: $\frac{l(b + c)}{2bc} < 1$,

adică $l < \frac{2bc}{b + c}$, care reprezintă condiția problemei.

Dacă această condiţie este satisfăcută, determinăm unghiul A şi problema se reduce la cazul doi de rezolvare a triunghiurilor oarecare.

În aplicaţia numerică avem: $\cos\frac{A}{2} = \frac{37 \cdot 95}{2 \cdot 54 \cdot 41}$,

deci: $\lg\cos\frac{A}{2} = \lg 37 + \lg 95 + \text{colg}\, 2 + \text{colg}\, 54 + \text{colg}\, 41 = 1{,}56820 + 1{,}97772 + \bar{1}{,}69897 + 2{,}26761 + \bar{2}{,}38722 = \bar{1}{,}89972$.

De aici rezultă: $\frac{A}{2} = 37°27'24''$, adică: $A = 74°54'48''$.

Din formula: $\text{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\,\text{ctg}\frac{A}{2}$, rezultă: $\lg\ \text{tg}\frac{B-C}{2} = \lg 13 + \lg\text{ctg}\, 37°27'24'' + \text{colg}\, 95 = 1{,}11394 + 0{,}11570 + \bar{2}{,}02228 = \bar{1}{,}25192$, de unde: $\frac{B-C}{2} = 10°7'38''$,

adică: $B - C = 20°15'16''$.

De aici şi din $B + C = 180° - A = 105°5'12''$ deducem: $B = 62°40'14''$, $C = 42°24'58''$.

În sfîrşit, din formula: $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ rezultă: $a = 58{,}69$.

32. *Să se rezolve triunghiul ABC, cunoscînd latura a, diferenţa $c - b = d$, şi ştiind că $C = 2B$.*

Soluţie. Avem: $A = 180° - (B + C) = 180° - 3B$.

Din teorema sinusurilor deducem: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}$, adică: $\frac{a}{\sin 3B} = \frac{d}{\sin 2B - \sin B}$.

Dar $\sin 3B = \sin B(4\cos^2 B - 1)$, $\sin 2B = 2\sin B\cos B$, deci:

$$\frac{a}{\sin B(4\cos^2 B - 1)} = \frac{d}{\sin B\,(2\cos B - 1)}.$$

De aici rezultă: $\frac{a}{2\cos B + 1} = d$, de unde: $\cos B = \frac{a-d}{2d}$.

Pentru ca problema să aibă soluţie trebuie ca: $\frac{a-d}{2d} < 1$, adică: $a < 3d$.

Presupunînd această condiţie îndeplinită, din (1) rezultă unghiul B şi deci unghiurile A şi C. Din teorema sinusurilor obţinem laturile b şi c.

33. *Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau unghiurile A şi B şi aria $S = \frac{k^2}{2}$.*

Soluţie. Avem: $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$. De aici rezultă: $a^2 = \frac{k^2 \sin A}{\sin B \sin C}$,

adică: $a^2 = \frac{k^2 \sin A}{\sin B \sin (A+B)}$.

Laturile b şi c se calculează din formulele: $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$.

34. *Să se rezolve un triunghi în care se cunoaşte o latură, suma celorlalte două şi aria. Discuţie.*

Soluţie. Ni se dau deci a, $b + c = l$ şi S.

Scriind teorema cosinusului sub forma: $a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 2bc(1 + \cos A)$, rezultă:

$$bc = \frac{l^2 - a^2}{2(1 + \cos A)}.$$

De asemenea, din formula: $S = \frac{bc \sin A}{2}$, deducem: $bc = \frac{2S}{\sin A}$.

Din aceste două relații obținem: $\frac{l^2 - a^2}{2(1 + \cos A)} = \frac{2S}{\sin A}$ sau, avînd în vedere că $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$, $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$, $\frac{l^2 - a^2}{2 \cos \frac{A}{2}} = \frac{2S}{\sin \frac{A}{2}}$, adică: $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4S}{l^2 - a^2}$.

De aici deducem valoarea unghiului A. Înlocuind această expresie a lui $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$ în (1), obținem: $bc = \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{4(l^2 - a^2)}$.

Ținînd seama că $b + c = l$, rezultă că b și c sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - lx + \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{4(l^2 - a^2)} = 0. \tag{2}$$

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcinile reale trebuie ca realizantul ei să fie pozitiv sau nul, adică: $l^2 - \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{l^2 - a^2} \geqslant 0$ sau $S^2 \leqslant \frac{a^2(l^2 - a^2)}{16}$, deci: $S \leqslant \frac{a}{4} \sqrt{l^2 - a^2}$.

Dacă această condiție este satisfăcută, ecuația (2) are rădăcinile pozitive (suma și produsul rădăcinilor sînt numere pozitive).

Unghiul B rezultă din formula: $\sin B = \frac{l \sin A}{a}$.

35. *Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau unghiul A, înălțimea h coborîtă din A și* $bc = m^2$.

Soluție. Notînd cu H proiecția lui A pe latura BC, din triunghiurile AHB și AHC deducem: $b = h \sin C$, $c = h \sin B$, care, înlocuite în relația $bc = m^2$, ne dau: $\sin B \sin C = \frac{m^2}{h^2}$. **(1)**

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri rezultă: $\cos (B - C) - \cos (B + C) = \frac{m^2}{2h^2}$

sau, avînd în vedere că $\cos (B + C) = -\cos A$: $\cos (B - C) = \frac{m^2}{2h^2} - \cos A$.

De aici rezultă că problema are soluție dacă: $0 < \frac{m^2}{2h^2} - \cos A \leqslant 1$,

sau: $\cos A < \frac{m^2}{2h^2} \leqslant 1 + \cos A$.

Avînd în vedere că $\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$, această inegalitate devine:

$$\frac{m^2}{4h^2} \leqslant \cos^2 \frac{A}{2} < \frac{m^2 + 2h^2}{4h^2}$$, sau, ținînd seama că $\cos \frac{A}{2} > 0$,

$\frac{m}{2h} \leqslant \cos \frac{A}{2} < \frac{\sqrt{m^2 + 2h^2}}{2h}$, care reprezintă condiția de posibilitate a problemei.

Presupunînd această condiţie satisfăcută şi notînd cu α cel mai mic unghi pozitiv pentru care $\cos\alpha = \frac{m^2}{2h^2} - \cos A$, rezultă: $B - C = \pm\alpha$, care, împreună cu relaţia $B + C = 180° - A$, ne dau: $B = 90° - \frac{A}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$, $C = 90° - \frac{A}{2} \mp \frac{\alpha}{2}$.

Problema are o singură soluţie: $B = 90° - \frac{A}{2} + \frac{\alpha}{2}$, $C = 90° - \frac{A}{2} - \frac{\alpha}{2}$, căci dacă luăm pe α cu celălalt semn obţinem acelaşi triunghi.

Înlocuind aceste valori în (1) obţinem valorile laturilor b şi c. Latura a se calculează cu formula:

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{h \sin A \sin C}{\sin B}.$$

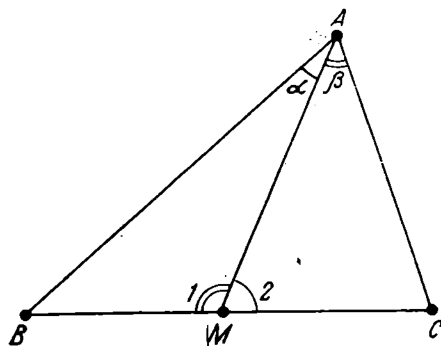


Fig. VI, 2

36. *Într-un triunghi oarecare ABC se dau mediana m dusă din vîrful A şi unghiurile α şi β pe care aceasta le face cu laturile AB, respectiv AC. Să se calculeze latura a a triunghiului.*

Soluţie. Notînd cu M mijlocul laturii a şi aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABM obţinem (fig. VI, 2):

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin\alpha} = \frac{m}{\sin(M_1 + \alpha)},$$

de unde: $\sin(M_1 + \alpha) = \frac{2m \sin\alpha}{a}$.

De asemenea, din triunghiul ACM deducem:

$$\frac{\frac{a}{2}}{\sin\beta} = \frac{m}{\sin(M_1 - \beta)},$$

de unde: $\sin(M_1 - \beta) = \frac{2m \sin\beta}{a}$. Dezvoltînd, avem: $\sin M_1 \cos\alpha + \cos M_1 \sin\alpha = \frac{2m\sin\alpha}{a}$,

$\sin M_1 \cos\beta - \cos M_1 \sin\beta = \frac{2m \sin\beta}{a}$.

Din acest sistem deducem: $\sin M_1 = \frac{4m \sin\alpha \sin\beta}{a \sin(\alpha + \beta)}$, $\cos M_1 = \frac{2m \sin(\alpha - \beta)}{a \sin(\alpha + \beta)}$.

Ridicînd la pătrat şi adunînd, obţinem: $\frac{16\, m^2 \sin^2\alpha \sin^2\beta}{a^2 \sin^2(\alpha + \beta)} + \frac{4\, m^2 \sin^2(\alpha - \beta)}{a^2 \sin^2(\alpha + \beta)} = 1$,

de unde: $a = \frac{2m}{\sin(\alpha + \beta)} \sqrt{4 \sin^2\alpha \sin^2\beta + \sin^2(\alpha - \beta)}$.

Pentru a obţine o formulă calculabilă prin logaritmi, să notăm: $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta} = \operatorname{tg}\varphi$.

Cu aceasta obţinem: $a = \frac{4m \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}$, adică: $a = \frac{4m \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta) \cos\varphi}$.

37. *Să se determine expresiile laturilor a, b, c, a ariei S şi a razei cercului circumscris R, în funcţie de unghiurile triunghiului şi de raza cercului înscris r.*

Soluţie. Din formulele:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}},\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}},\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

rezultă: $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

De aici deducem: $p - a = r\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, $p - b = r\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$, $p - c = r\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Adunînd aceste trei relaţii obţinem: $p = r\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$,

de unde: $a = r\left(\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right) = r\dfrac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = r\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

Analog, găsim: $b = r\dfrac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}}$, $c = r\dfrac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$.

Din formula: $S = pr$ deducem: $S = r^2\left(\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2}\right)$.

Dar: $\operatorname{ctg}\frac{A}{2} + \operatorname{ctg}\frac{B}{2} + \operatorname{ctg}\frac{C}{2} = \operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$, deci: $S = r^2\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{B}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

Din formula: $R = \dfrac{abc}{4S}$ rezultă: $R = \dfrac{r^3\dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}}}{4r^2\dfrac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} = \dfrac{r}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$.

38. *Să se rezolve triunghiul ABC în care se dau unghiul A, perimetrul 2p şi raza R a cercului circumscris.*

Soluţie. Avem: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$, (1)

de unde: $2R(\sin A + \sin B + \sin C) = 2p$, adică: $\sin B + \sin C = \dfrac{p}{R} - \sin A$.

Transformînd în produs, obţinem: $2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{p}{R} - \sin A$,

de unde: $\cos\dfrac{B-C}{2} = \dfrac{p - R\sin A}{2R\cos\frac{A}{2}}$. (2)

Pentru ca problema să aibă soluţii trebuie ca: $0 < \frac{p - R \sin A}{2R \cos \frac{A}{2}} \leqslant 1$.

Prima parte a inegalităţii ne dă: $p > R \sin A$, iar a doua: $p \leqslant R \left(\sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \right)$

sau: $p \leqslant 2R \cos \frac{A}{2} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)$.

Deci, condiţia problemei este: $R \sin A < p \leqslant 2R \cos \frac{A}{2} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \right)$.

În cazul în care această condiţie este satisfăcută, din (2) rezultă valoarea diferenţei $B - C$, care împreună cu $B + C = 180° - A$ ne dau unghiurile B şi C. Cu aceste valori, din (1) rezultă a, b, c.

39. ***Să se rezolve un triunghi cunoscînd latura mijlocie b, aria $S = m^2$ şi ştiind că cele trei unghiuri sînt în progresie aritmetică.***

Soluţie. Să presupunem că C este cel mai mic unghi al triunghiului. Ştiind că b este latura mijlocie, rezultă că: $C < B < A$.

Notînd cu α raţia progresiei aritmetice, rezultă: $A = B + \alpha$, $C = B - \alpha$.

Ţinînd seama că $A + B + C = 180°$, deducem: $B = 60°$.

Avînd în vedere în formula: $S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B,}$, şi că: $S = m^2$, $A = 60° + \alpha$, $B = 60°$, $C = 60° - \alpha$, obţinem: $\sin(60° + \alpha) \sin(60° - \alpha) = \frac{m^2 \sqrt{3}}{b^2}$.

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferenţă de cosinusuri, deducem: $\cos 2\alpha - \cos 120° = \frac{2m^2 \sqrt{3}}{b^2}$ sau, avînd în vedere că $\cos 120° = -\frac{1}{2}$: $\cos 2\alpha = \frac{4m^2 \sqrt{3} - b^2}{2b^2}$. (1)

Dar avem $\alpha < 60°$, deci $2\alpha < 120°$, adică $-\frac{1}{2} < \cos 2\alpha \leqslant 1$.

Ţinînd seama de valoarea lui $\cos 2\alpha$ rezultă: $-\frac{1}{2} < \frac{4m^2 \sqrt{3} - b^2}{2b^2} \leqslant 1$,

sau: $-b^2 < 4m^2 \sqrt{3} - b^2 \leqslant 2b^2$.

Prima parte a inegalităţii este identic satisfăcută, deci rămîne: $4m^2 \sqrt{3} - b^2 \leqslant 2b^2$,

adică: $m^2 \leqslant \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$.

Presupunînd că această condiţie este satisfăcută, din (1) rezultă valoarea lui α şi deci unghiurile A şi C. Din formulele:

$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$, $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$, deducem laturile a şi c.

40. ***Să se demonstreze că în triunghiul ABC, în care mediana AM este egală cu latura c, avem:*** $\operatorname{tg} B = 3 \operatorname{tg} C$, $\sin A = 2 \sin(B - C)$.

Soluţie. Dacă notăm $AM = m$, teorema medianei se scrie: $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$,

sau, ţinînd seama că $m = c$; $c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$,

adică: $c^2 = b^2 - \frac{a^2}{2}$.

Teorema cosinusului, scrisă pentru latura c, ne dă: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$.

Înlocuind aici valoarea lui c de mai sus obținem: $3a = 4b \cos C$.

Dar $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, deci: $3 \sin A = 4 \sin B \cos C$. (1)

Avînd în vedere că $\sin A = \sin (B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$, această relație devine: $3 \sin C \cos B = \sin B \cos C$, adică: $3 \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B$.

Să scădem acum din egalitatea (1) egalitatea $2 \sin A = 2 \sin (B + C)$.

Obținem: $\sin A = 2(\sin B \cos C - \sin C \cos B)$, sau: $\sin A = 2 \sin (B - C)$.

41. *Unghiurile unui triunghi ABC formează o progresie aritmetică. Se cere să se determine unghiurile triunghiului știind că suma sinusurilor lor este egală cu* $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$.

Soluție. Presupunînd $A < B < C$ și notînd cu α rația progresiei, avem: $A = B - \alpha$, $C = B + \alpha$, deci: $B - \alpha + B + B + \alpha = 180°$,

de unde: $B = 60°$.

Condiția dată devine: $\sin (60° - \alpha) + \sin 60° + \sin (60° + \alpha) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$,

adică: $2 \sin 60° \cos \alpha = \frac{3}{2}$, deci: $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

De aici rezultă $\alpha = 30°$ și deci unghiurile triunghiului sînt: $A = 30°$, $B = 60°$, $C = 90°$.

42. *Într-un triunghi ABC laturile sînt în progresie aritmetică, latura a fiind latură mijlocie. Se cere:*

1° *Să se demonstreze că avem relația:* $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

2° *Fiind dată valoarea unghiului A să se determine unghiurile B și C. Discuție.*

Soluție. 1° Dacă notăm cu l rația progresiei, avem: $b = a - l$, $c = a + l$.

De aici rezultă: $2p = a + a - l + a + l = 3a$, adică: $p = \frac{3a}{2}$.

Cu această valoare obținem: $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-c)}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} =$

$$= \frac{p-a}{p} = \frac{\frac{3a}{2} - a}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{3}.$$

2° Ținînd seama de expresiile laturilor triunghiului, teorema sinusurilor se scrie: $\frac{a}{\sin A} =$

$= \frac{a - l}{\sin B} = \frac{a + l}{\sin C}$, de unde: $\frac{2a}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}$, sau: $2 \sin A = \sin B + \sin C$.

Transformînd suma de sinusuri în produs, obținem: $4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} =$

$= 2 \sin \frac{B + C}{2}$ s $\frac{B - C}{2}$, sau, avînd în vedere că $\sin \frac{B + C}{2} =$

$= \cos \frac{A}{2} \neq 0$: $\cos \frac{B - C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2}$. (1)

Din această relație deducem valoarea diferenței $B - C$ și, avînd în vedere că $B + C = 180° - A$, obținem unghiurile B și C.

Pentru ca ecuația (1) să aibă soluții, trebuie ca: $2 \sin \frac{A}{2} \leqslant 1$, adică: $\sin \frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{2}$.

De aici rezultă: $\frac{A}{2} \leqslant 30°$, deci: $A \leqslant 60°$.

43. *Fie AOB un unghi drept. Să se ducă o dreaptă la distanța R de vîrful O, astfel încît, dacă notăm cu C și D punctele în care ea intersectează laturile OA, respectiv OB, să avem: $OC + OD = k$.*

Soluție. Notăm cu M proiecția punctului O pe dreapta CD și cu $x = \widehat{COM}$. Avem $OM = R$. Pentru a determina poziția dreptei CD trebuie să găsim valoarea unghiului x.

Avem: $OC = \dfrac{R}{\cos x}$, $OD = \dfrac{R}{\sin x}$, deci relația dată devine: $\dfrac{R}{\cos x} + \dfrac{R}{\sin x} = m$,

adică: $R(\sin x + \cos x) = m \sin x \cos x$.

Ridicînd la pătrat, deducem: $R^2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = m^2 \sin^2 x \cos^2 x$,

sau: $m^2 \sin^2 2x - 4R^2 \sin 2x - 4R^2 = 0$.

De aici rezultă: $\sin 2x = \dfrac{2R^2 \pm \sqrt{4R^4 + 4R^2m^2}}{m^2}$.

Dar $x < 90°$, deci $2x < 180°$, deci $\sin 2x > 0$, adică: $\sin 2x = \dfrac{2R(R + \sqrt{R^2 + m^2})}{m^2}$.

Pentru ca problema să aibă soluție, trebuie ca: $2R(R + \sqrt{R^2 + m^2}) \leqslant m^2$

sau: $\sqrt{R^2 + m^2} \leqslant \dfrac{m^2 - 2R^2}{2R}$.

O primă condiție este: $m^2 > 2R^2$.

Presupunînd această condiție satisfăcută, putem ridica la pătrat inegalitatea de mai sus și deducem: $R^2 + m^2 \leqslant \dfrac{(m^2 - 2R^2)^2}{4R^2}$, de unde rezultă: $m^2 \geqslant 8R^2$.

Această condiție conține condiția (1). De aici deducem: $m \geqslant 2\sqrt{2}R$, care reprezintă condiția de posibilitate a problemei.

Dacă $m = 2\sqrt{2}R$, găsim: $\sin 2x = 1$, adică $x = 45°$, deci dreapta CD este perpendiculară pe bisectoarea unghiului AOB.

44. *Să se determine latura unui triunghi echilateral avînd vîrfurile pe trei cercuri concentrice de raze date a, b, c.*

Soluție. Fie O centrul comun al celor trei cercuri și ABC triunghiul echilateral căutat (fig. VI, 3). Notăm cu x latura triunghiului echilateral și cu α unghiul OAB. Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul OAB obținem:

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha.$$

Ținînd seama că $\widehat{OAC} = 60° - \alpha$, din triunghiul OAC deducem: $c^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos (60° - \alpha) = a^2 + x^2 - ax\sqrt{3} \sin \alpha - ax \cos \alpha$.

Din aceste două relații deducem:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + x^2 - b^2}{2ax}, \quad \sin \alpha = \frac{a^2 + b^2 + x^2 - 2c^2}{2ax\sqrt{3}}.$$

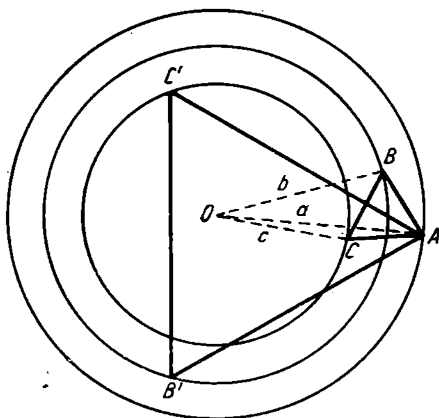


fig. VI, 3.

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste două relații, obținem:

$\dfrac{(x^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2x^2} + \dfrac{(x^2 + a^2 + b^2 - 2c^2)^2}{12a^2x^2} = 1$, sau: $x^4 - (a^2 + b^2 + c^2) x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0$. Notînd $x^2 = y$, avem: $y^2 - (a^2 + b^2 + c^2)y + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0$. (1

Realizantul acestei ecuații este: $R = 3(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)$ sau: $R = 3(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)$.

Pentru ca R să fie pozitiv este necesar și suficient ca fiecare dintre cele trei raze a, b, c să fie mai mici decît suma celorlalte două.

De asemenea, suma rădăcinilor ecuației (1) este: $S = a^2 + b^2 + c^2 > 0$, iar produsul: $P = a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = \frac{1}{2}[(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] > 0$.

Rezultă că, dacă condiția de mai sus este satisfăcută, ecuația (1) are rădăcini pozitive: $y_1 > 0$, $y_2 > 0$.

În acest caz, problema are două soluții, şi anume: $x_1 = \sqrt{y_1}$, $x_2 = \sqrt{y_2}$,

adică: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)}}{2}}$.

45. *Fie AOB un unghi a cărui mărime este 2α. Pe bisectoarea unghiului luăm un punct C, astfel încît $OC = a$ şi prin el ducem o secantă care intersectează laturile unghiului în D, respectiv E. Să se determine $OCD = x$, astfel încît:*

$$CD \cdot CE = a^2.$$

Soluție. Notăm $CD = m$, $CE = n$. Din triunghiul OCD deducem: $\frac{m}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin[180 - (\alpha + x)]}$,

adică: $m = \frac{a\sin\alpha}{\sin(x + \alpha)}$.

Analog, din triunghiul OCE obținem: $n = \frac{a\sin\alpha}{\sin(x - \alpha)}$.

Cu aceste valori, relația dată devine: $\frac{a^2\sin^2\alpha}{\sin(x+\alpha)\sin(x-\alpha)} = a^2$, de unde: $\sin(x + \alpha)\sin(x - \alpha) = \sin^2\alpha$, sau: $\sin^2 x\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2 x = \sin^2\alpha$.

Înlocuind aici $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, găsim: $\sin^2 x = 2\sin^2\alpha$, adică: $\sin x = \pm\sqrt{2}\sin\alpha$.

Pentru ca această ecuație să aibă soluție, trebuie ca: $2\sin^2\alpha \leqslant 1$ sau, avînd în vedere că $0° < \alpha < 90°$: $\sin\alpha \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci: $0° < \alpha < 45°$.

Presupunînd această condiție satisfăcută şi notînd cu β cel mai mic unghi pozitiv pentru care $\sin\beta = \sqrt{2}\sin\alpha$, ecuația (1) are soluțiile: $x_1 = \beta$, $x_2 = 180° - \beta$, $x_3 = -\beta$, $x_4 = 180° + \beta$.

Pentru problemă sînt acceptabile soluțiile x_1 şi x_2 care ne conduc la două secante simetrice față de bisectoarea OC.

46. *Fie AB un segment şi AC, $BD \perp AB$. Pe segmentul AB luăm un punct I şi notăm $AI = a$, $BI = b$. Considerăm un unghi drept cu vîrful în I şi care intersectează dreptele AC şi BD în M, respectiv N. Să se determine poziția unghiului drept, astfel încît: $IM + IN = k\,MN$.*

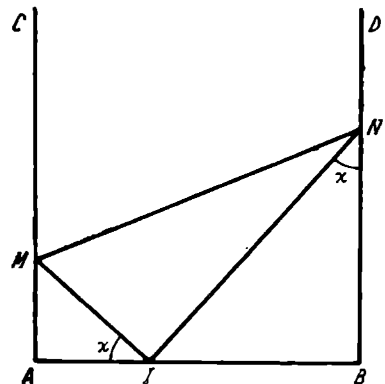


Fig. VI, 4.

Soluție. Dacă notăm $\widehat{AIM} = x$, avem (fig. VI, 4):

$IM = \frac{a}{\cos x}$, $IN = \frac{b}{\sin x}$,

deci: $MN = \sqrt{IM^2 + IN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x} + \frac{b^2}{\sin^2 x}} = \sqrt{\frac{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}{\sin x\cos x}}$.

Cu aceste valori, relația dată devine: $\frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} = \frac{k\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}{\sin x\cos x}$,

sau: $a\sin x + b\cos x = k\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

Ridicînd la pătrat, deducem: $a^2(1-k^2)\sin^2 x + 2ab\sin x\cos x + b^2(1-k^2)\cos^2 x = 0$ **sau, împărțind** cu $\cos^2 x \neq 0$: $a^2(1-k^2)\,\mathrm{tg}^2 x + 2ab\,\mathrm{tg}\, x + b^2(1-k^2) = 0$. (1)
Această ecuație determină unghiul x, deci poziția unghiului MIN.
Pentru ca ecuația (1) să aibă rădăcini reale, trebuie ca: $a^2b^2 - a^2b^2(1-k^2)^2 \geqslant 0$ sau:

$$k^2(\sqrt{2}+k)(\sqrt{2}-k) \geqslant 0.$$

Dar $k > 0$, deci de aici rezultă: $k \leqslant \sqrt{2}$.
Dacă notăm cu S și P suma și produsul rădăcinilor ecuației (1) considerată ca o ecuație de gradul II în tg x, avem: $S = \dfrac{2b}{a(k^2-1)}$, $P = \dfrac{b^2}{a^2}$.

Pentru ca rădăcinile ecuației (1) să fie acceptabile, trebuie ca ele să fie pozitive, căci

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ deci } \mathrm{tg}\, x > 0.$$

De aici rezultă: $k > 1$.
Deci, condiția de posibilitate a problemei este: $1 < k \leqslant \sqrt{2}$.

Pentru $k = \sqrt{2}$, avem: $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{b}{a}$.

47. *Se consideră un triunghi isoscel AOB, al cărui vîrf O este fix și ale cărui laturi egale $OA = OB$ au o lungime constantă l. Prin punctul O ducem o dreaptă fixă Ox și notăm $\widehat{xOA} = \alpha$, $\widehat{xOB} = \beta$. Să se arate că dacă dreapta AB variază astfel încît*

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = k, \ (k = const. > 0),$$

atunci ea trece printr-un punct fix situat pe dreapta Ox.

Soluție. Fie E și F proiecțiile punctelor A, respectiv B, pe dreapta Ox și C punctul în care dreapta AB intersectează pe Ox (fig. VI, 5). Triunghiurile AEC și BDC sînt asemenea

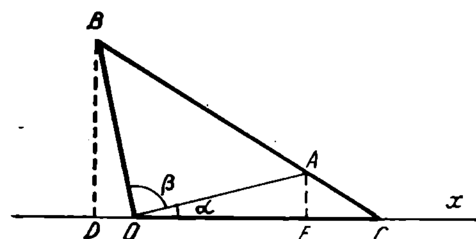


Fig. VI, 5.

și deci: $\dfrac{EC}{DC} = \dfrac{AE}{BD}$ sau: $\dfrac{OC - OE}{OC + OD} = \dfrac{AE}{BD}$,

de unde: $OC = \dfrac{OE \cdot BD + AE \cdot OD}{BD - AE}$.

Dar: $OE = l\cos\alpha$, $OD = l\cos\beta$, $AE = l\sin\alpha$, $BD = l\sin\beta$,

$$\text{deci: } OC = l\frac{\sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta - \sin\alpha} = l\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta - \sin\alpha} =$$

$$= l\frac{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\alpha}{2}} = l\frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}} = l\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= l\frac{1 + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} = l\frac{1+k}{1-k}.$$

Rezultă că: OC = const., deci punctul O este fix.

48. *Se consideră un cerc cu centrul în punctul O și cu raza R* **și două coarde** *AG și AH care fac cu raza AO unghiurile α, respectiv β. Fie EF o* **coardă care intersectează** *coardele AG și AH în B, respectiv C, D și M proiecțiile punctului* **O pe** *EF și AB. Se dă OD = a și $\widehat{DOM}$ = φ și se cere să se determine* **lungimile laturilor** *și aria triunghiului ABC.*

Soluție. Fie N proiecția lui O pe AC (fig. VI, 6).

Avem: $AB = AM + MB$, $AC = AN + NC$.

Din triunghiurile AOM și AON deducem: $AM = R\cos\alpha$, $AN = R\cos\beta$.

Proiectînd conturul $OMBD$ pe dreapta OD, obținem: $OD = OM\cos\varphi + MB\sin\varphi$.

Dar $OM = R\sin\alpha$, deci de aici rezultă:

$$MB = \frac{a - R\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Analog, proiectînd conturul $ONCD$ pe dreapta CD, găsim: $OD = ON\cos(\varphi + \beta - \alpha) + NC\sin(\varphi + \beta - \alpha)$, de unde, avînd în vedere că $ON = R\sin\beta$:

$$NC = \frac{a - R\sin\beta\cos(\varphi + \beta - \alpha)}{\sin(\varphi + \beta - \alpha)}.$$

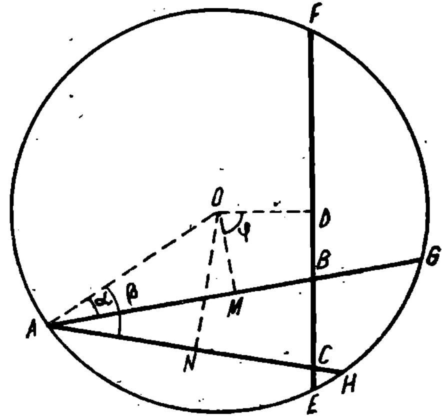


Fig. VI, 6.

Cu aceste valori obținem: $AB = R\cos\alpha + \frac{a - R\sin\alpha\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{R\sin(\varphi - \alpha) + a}{\sin\varphi}$,

$$AC = R\cos\beta + \frac{a - R\sin\beta\cos(\varphi + \beta - \alpha)}{\sin(\varphi + \beta - \alpha)} = \frac{R\sin(\varphi - \alpha) + a}{\sin(\varphi + \beta - \alpha)}.$$

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABC și avînd în vedere că $\widehat{ABC} = \varphi$, găsim:

$$\frac{BC}{\sin(\beta - \alpha)} = \frac{AC}{\sin\varphi}, \text{ de unde: } BC = \frac{R\sin(\varphi - \alpha)\sin(\beta - \alpha) + a\sin(\beta - \alpha)}{\sin\varphi\sin(\varphi + \beta - \alpha)}.$$

Aria triunghiului ABC este: $S = \frac{AB \cdot AC\sin(\beta - \alpha)}{2}$, sau, avînd în vedere expresiile laturilor AB și AC: $S = \frac{[R\sin(\varphi - \alpha) + a]^2\sin(\beta - \alpha)}{2\sin\varphi\sin(\varphi + \beta - \alpha)}$.

49. *Se consideră sfertul de cerc AOB de rază R și tangentele la el CA și CB* (fig. VI, 7). *Fie M un punct oarecare pe arcul AB. Notăm $\widehat{MCB} = \alpha$, $\widehat{MOB} = \varphi$. Se cere:*

1° *Calculînd în două moduri diferite lungimea segmentului MB, să se deducă:*

$$\cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{2}\cos(45° + \alpha). \qquad (1)$$

2° *Să se discute ecuația* (1) *considerată ca o ecuație cu necunoscuta φ, α fiind un unghi fix ascuțit.*

3° *Să se determine efectiv valoarea lui φ dacă α = 15°.*

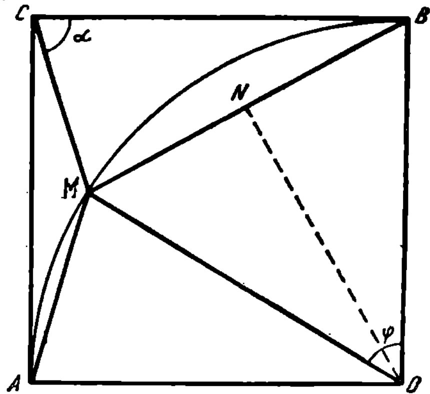


Fig. IV, 7.

Soluție. 1° Dacă notăm cu N mijlocul segmentului MB, din triunghiul ONB deducem:

$$NB = R\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \text{deci: } MB = 2R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Din triunghiul MBC, teorema sinusurilor ne dă: $\dfrac{MB}{\sin\alpha} = \dfrac{R}{\sin\left(180^\circ - \alpha - \dfrac{\varphi}{2}\right)}$,

adică: $MB = \dfrac{R\sin\alpha}{\sin\left(\alpha + \dfrac{\varphi}{2}\right)}$.

Egalînd cele două valori găsite pentru MB, obținem: $\sin\alpha = 2\sin\left(\alpha + \dfrac{\varphi}{2}\right)\sin\dfrac{\varphi}{2}$.

Transformînd produsul de sinusuri în diferență de cosinusuri, această relație devine: $\sin\alpha = \cos\alpha - \cos(\alpha + \varphi)$, adică: $\cos(\alpha + \varphi) = \cos\alpha - \sin\alpha$.

Dar: $\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha\right) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ\cos\alpha - \sin 45^\circ\sin\alpha) =$

$$= \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha), \text{ deci: } \cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha).$$

2° Avem $0^\circ < \varphi + \alpha < 180^\circ$, deci $-1 < \cos(\varphi + \alpha) < 1$. Din ecuația (1) rezultă că trebuie

$$\text{să avem: } -1 < \sqrt{2}\cos(45^\circ + \alpha) < 1$$

sau: $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \cos(45^\circ + \alpha) < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Această inegalitate are loc dacă: $45^\circ < 45^\circ + \alpha < 135^\circ$, care este totdeauna adevărată, căci $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Deci ecuația (1) are soluții. 3° Dacă $\alpha = 15^\circ$, ecuația (1) devine: $\cos(\varphi + 15^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de unde: $\varphi + 15^\circ = 45^\circ$, adică: $\varphi = 30^\circ$.

50. *Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$. Prin A se duce o coardă AC a semicercului care face cu AB unghiul θ, ar printr-un punct D de pe diametru se duce o perpendiculară pe acesta, care intersectează coarda AC în E, iar semicercul în F. Să se determine poziția punctului D, astfel încît $DE + DF = l$. Discuție.*

Soluție. Ducem dreapta AF și notăm $\widehat{BAF} = x$. Avem: $AD = AF\cos x$.

Dar, din triunghiul ABF deducem: $AF = 2R\cos x$, deci: $AD = 2R\cos^2 x$. Din triunghiurile ADE și ADF găsim: $DE = AD\operatorname{tg}\theta$, $DF = AD\operatorname{tg} x$, adică: $DE = 2R\cos^2 x\operatorname{tg}\theta$, $DF = 2R\sin x\cos x$.

Cu aceste valori relația dată devine: $2R\operatorname{tg}\theta\cos^2 x + 2R\sin x\cos x = l$ sau $R\operatorname{tg}\theta(\cos 2x + 1) + R\sin 2x = l$.

Dar: $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, $\quad \cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$, deci ecuația de mai sus devine: $l\operatorname{tg}^2 x -$

$$- 2R\operatorname{tg} x + l - 2R\operatorname{tg}\theta = 0.$$

Notînd $y = \operatorname{tg} x$, obținem ecuația de gradul doi: $ly^2 - 2Ry + l - 2R\operatorname{tg}\theta = 0$. (1)
Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini reale trebuie ca: $R^2 - l(l - 2R\operatorname{tg}\theta) \geqslant 0$, adică:

$$l^2 - 2R\operatorname{tg}\theta \cdot l - R^2 \leqslant 0.$$

De aici rezultă: $R(\operatorname{tg}\theta - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}) \leqslant l \leqslant R(\operatorname{tg}\theta + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta})$.

Dar $l > 0$, deci avem condiția: $0 < l \leqslant R\dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$. (2)

Notînd cu S şi P suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei date, avem:

$$S = \frac{2R}{l} > 0, P = \frac{l - 2R \operatorname{tg} \theta}{l}.$$

Dacă $l < 2R \operatorname{tg} \theta$, avem $P < 0$, iar dacă $l > 2R \operatorname{tg} \theta$, avem $P > 0$. Ţinînd seama că

$$\text{pentru } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}: 2 \operatorname{tg} \theta < \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta},$$

rezultă că dacă $0 < l < 2 R \operatorname{tg} \theta$, ecuaţia (1) are o rădăcină pozitivă şi una negativă; dacă: $2R \operatorname{tg} \theta < l \leqslant R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$, ecuaţia (1) are două rădăcini pozitive; iar dacă: $l = 2R \operatorname{tg} \theta$, ecuaţia (1) are o rădăcină nulă şi una pozitivă egală cu $\operatorname{ctg} \theta$.

Avînd în vedere că x este un unghi ascuţit rezultă că $\operatorname{tg} x > 0$, deci dacă:

$$0 < l \leqslant 2R \operatorname{tg} \theta,$$

problema are o soluţie; dacă $2R \operatorname{tg} \theta < l \leqslant R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$ problema are două soluţii.

În cazul $l = 2R \operatorname{tg} \theta$, avem $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \theta$, deci $x = \frac{\pi}{2} - \theta$. În cazul $l = R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$, avem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}, \text{ sau: } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right), \text{ adică: } x = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

51. *Se consideră un cerc cu centrul în O şi raza R. Printr-un punct M situat în exteriorul cercului ducem o secantă care intersectează cercul în B şi C. În aceste puncte se duc tangentele la cerc care se intersectează în A. Să se determine poziţia secantei MBC, astfel încît una dintre înălţimile triunghiului ABC să aibă o lungime dată.*

Soluţie. Fie MD tangenta dusă din M la cerc şi I punctul în care OA intersectează pe BC (fig. VI, 8). Notăm $x = \widehat{OMB}$, $y = \widehat{OAB}$, $\alpha = \widehat{OMD}$. Pentru a determina poziţia secantei MBC trebuie să determinăm unghiul x.

Avem: $OA \perp BC$, $OC \perp AC$, $OB \perp AB$, deci:

$$\widehat{OCI} = \widehat{OBI} = y.$$

Scoţînd valoarea segmentului OI din triunghiurile OMI şi OBI, obţinem: $OI = OM \sin x = R \sin y$.

Dar, din triunghiul ODM deducem:

$$OM = \frac{R}{\sin \alpha},$$

deci egalitatea de mai sus devine:

$$\frac{R \sin x}{\sin \alpha} = R \sin y, \text{ de unde: } \sin x = \sin \alpha \sin y. \quad (1)$$

Să presupunem că înălţimea AI are o lungime dată h. Avem: $AI = OA - OI$, deci: $h = \frac{R}{\sin y} - R \sin y$.

Înlocuind aici pe $\sin y$ cu valoarea lui dată de (1) obţinem: $R \sin^2 x + h \sin \alpha \sin x - R \sin^2 \alpha = 0$ de unde: $\sin x = \frac{\sin \alpha}{2R} (-h \pm \sqrt{h^2 + 4R^2})$.

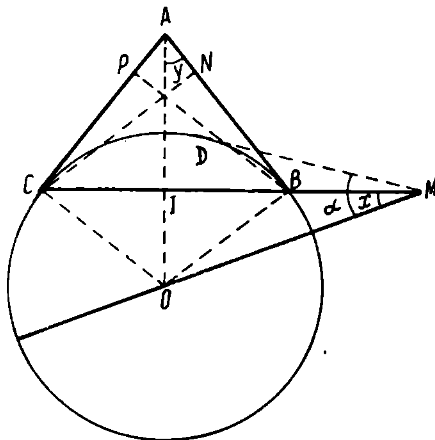


Fig. VI, 8.

Ţinînd seama că $\sin x > 0$, rezultă: $\sin x = \frac{\sin \alpha}{2R} (\sqrt{h^2 + 4R^2} - h)$.

Dacă înălţimea CN (sau $BP = CN$) are o valoare dată h', atunci: $h' = BC \cos y$.

Dar: $BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(180° - 2y)$, adică:

$BC^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2y = 2R^2 + 2R^2 (2\cos^2 y - 1) = 4R^2 \cos^2 y$, deci: $BC = 2R \cos y$.

Rezultă că: $h' = 2R\cos^2 y$ sau, ţinînd seama de (1): $h' = 2R\left(1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \alpha}\right)$.

De aici deducem: $\sin^2 x = \frac{2R - h'}{2R}\sin^2\alpha$, deci: $\sin x = \sqrt{\frac{2R-h'}{2R}}\sin\alpha$.

52. *Fie ABCD un patrulater convex ale cărui unghiuri le notăm cu A, B, C, D. Atunci avem relaţiile:*

$$1°\ \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2},$$

$$2°\ \sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}.$$

Soluţie. 1° Avînd în vedere că $D = 2\pi - (A + B + C)$, rezultă că: $\cos D = \cos(A + B + C)$ şi membrul întîi al relaţiei devine: $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)$.

Transformînd în produs această sumă rezultă: $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\cos\frac{A+B+2C}{2}\cos\frac{A+B}{2} = 2\cos\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{A+B+2C}{2}\right) = 2\cos\frac{A+B}{2}\cdot 2\cos\frac{A+C}{2}\cdot\cos\frac{B+C}{2} = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}$.

2° Transformînd în produse sumele formate din primul şi al treilea termen al membrului întîi, respectiv al doilea şi al patrulea, obţinem:

$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} - 2\sin\frac{B+D}{2}\cos\frac{B-D}{2}$.

Dar $\frac{B+D}{2} = 180° - \frac{A+C}{2}$, deci $\sin\frac{B+D}{2}\sin\frac{A+C}{2}$ şi suma de mai sus devine:

$$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 2\sin\frac{A+C}{2}\left(\cos\frac{A-C}{2} - \cos\frac{B-D}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{A+C}{2}\cdot 2\sin\frac{A+B-C-D}{4}\sin\frac{B+C-A-D}{4}.$$

Avînd în vedere că $C + D = 360° - (A + B)$ şi că $A + D = 360° - (B + C)$, rezultă că $\sin\frac{A+B-C-D}{4} = -\cos\frac{A+B}{2}$ şi $\sin\frac{B+C-A-D}{4} = -\cos\frac{B+C}{2}$ şi deci

$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{C+A}{2}$.

53. *Fie ABCD un patrulater convex. Notăm $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = f$, $BD = g$. Dacă O este punctul de intersecţie al diagonalelor şi $\widehat{AOD} = \varphi$, atunci:* $\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2fg}$.

Soluţie. Notînd $OA = x$, $OB = y$ şi aplicînd teorema cosinusului în triunghiurile OAB, OBC, OCD, ODA obţinem:

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos(180° - \varphi),$$
$$b^2 = (f - x)^2 + y^2 - 2(f - x)y\cos\varphi,$$
$$c^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 - 2(f - x)(g - y)\cos(180° - \varphi),$$
$$d^2 = x^2 + (g - y)^2 - 2x(g - y)\cos\varphi.$$

Dar $\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi$, deci:

$$a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2 + 2(fg - fy - gx + 2xy)\cos\varphi,$$
$$b^2 + d^2 = x^2 + y^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2 - 2(fy + gx - 2xy)\cos\varphi.$$

De aici rezultă: $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2fg\cos\varphi$, adică: $\cos\varphi = \dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2fg}$.

54. *Se consideră un patrulater inscriptibil $ABCD$, ale cărui laturi sînt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ şi se cere să se determine unghiurile, aria, diagonalele şi raza cercului circumscris.*

Soluţie. Din triunghiul ABD avem:
$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\cos A$, iar din triunghiul CBD: $BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$. (1)

Dar $C = 180° - A$, deci $\cos C = -\cos A$ şi din aceste două relaţii deducem: $a^2 + d^2 - 2ad\cos A = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$, de unde: $\cos A = \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$. (2)

Pentru a obţine o formulă calculabilă prin logaritmi să calculăm funcţiile trigonometrice ale unghiului $\dfrac{A}{2}$. Avem: $2\cos^2\dfrac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \dfrac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} =$

$$= \frac{a^2 + d^2 + 2ad - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)}{2(ad + bc)},$$

$$2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - (a^2 + d^2 - 2ad)}{2(ad + bc)} =$$

$$= \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{2(ad + bc)}.$$ Notînd: $a + b + c + d = 2p$,

avem: $b + c + d - a = 2p - 2a = 2(p - a)$, $\quad a + b + d - c = 2p - 2c = 2(p - c)$,
$a + c + d - b = 2p - 2b = 2(p - b)$, $\quad a + b + c - d = 2p - 2d = 2(p - d)$.

Cu această notaţie obţinem: $2\cos^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{2(p - b)(p - c)}{ad + bc}$, $2\sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{2(p - a)(p - d)}{ad + bc}$,

adică: $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - b)(p - c)}{ad + bc}}$, $\sin\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - d)}{ad + bc}}$. (3)

De aici deducem: $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}$.

Analog, găsim: $\operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p - a)(p - b)}{(p - c)(p - d)}}$.

Din aceste formule deducem unghiurile A şi B, iar din $C = 180° - A$, $D = 180° - B$ deducem unghiurile C şi D.

Pentru ca problema să aibă soluţie, trebuie ca: $(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) > 0$, adică $(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d) > 0$.

Presupunînd că a este cea mai mare dintre laturi rezultă că $a + c + d - b > 0$, $a + b + d - c > 0$, $a + b + c - d > 0$, deci condiţia problemei se scrie:

$$a < b + c + d.$$

Deci, pentru ca problema să aibă soluţii, trebuie ca cea mai mare dintre laturile patrulaterului să fie mai mică decît suma celorlalte laturi.

Ţinînd seama că aria S a patrulaterului $ABCD$ este suma ariilor triunghiurilor ABD şi CBD, rezultă că:

$$S = \frac{ad\sin A}{2} + \frac{bc\sin C}{2},$$

Dar: $\sin C = \sin(180° - A) = \sin A$, deci: $S = \dfrac{(ad + bc)\sin A}{2}$. Avem: $\sin A = 2\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}$ şi, ţinînd seama de formulele (3), obţinem: $\sin A = \dfrac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad + bc}$ (4)

şi deci: $S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$.

Ținînd seama în (1) de (2), rezultă:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc} =$$

$$= \frac{ab(ac + bd) + dc(ac + bd)}{ad + bc} = \frac{(ab + dc)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Analog, găsim: $AC^2 = \frac{(ab + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

Avînd în vedere că cercul circumscris patrulaterului $ABCD$ este în același timp și cercul circumscris triunghiului ABD, aplicînd teorema sinusurilor în acest triunghi rezultă:

$$2R = \frac{BD}{\sin A}.$$

Înlocuind aici valoarea lui BD și ținînd seama de formula (4), rezultă:

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}.$$

55. *Se consideră un trapez $ABCD$ în care se dau bazele $AD = m$, $BC = n$, $(m < n)$, înălțimea $AH = h$ și unghiul α făcut de prelungirile laturilor neparalele AB și CD. Să se calculeze lungimile laturilor neparalele. Aplicație: $m = 2$, $n = 5$, $k = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$.*

Soluție. Fie E punctul în care paralela dusă prin A la latura CD întîlnește latura BC (fig. VI, 9). În triunghiul ABE cunoaștem latura $BE = n - m$, înălțimea $AH = h$ și unghiul $\widehat{BAE} = \alpha$. Dacă notăm $AB = b$, $AE = CD = c$, $n - m = a$ și aria triunghiului cu S, avem:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}, \text{ adică } bc = \frac{ah}{\sin \alpha}.$$

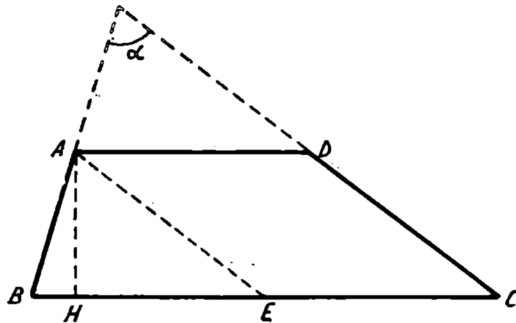


Fig. VI, 9.

De asemenea, teorema cosinusului se scrie: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos \alpha)$, de unde: $(b + c)^2 = a^2 + 2bc(1 + \cos \alpha)$ sau, avînd în vedere valoarea produsului bc; $(b + c)^2 = a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Analog, găsim: $(b - c)^2 = a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

De aici deducem: $b + c = \sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$,

$$b - c = \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

adică: $b = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2}$, $c = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2}$.

În cazul aplicației numerice date avem: $a = 3$, $h = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$, deci: $b = 2\sqrt{3}$, $c = \sqrt{3}$.

56. *Să se calculeze înălțimea h a unui trapez în funcție de bazele a și b și diagonalele d_1 și d_2.*

Soluție. Fie $ABCD$ un trapez ale cărui baze sînt $AB = a$, $CD = b$ și diagonalele $AD = d_1$, $BC = d_2$. Dacă notăm cu φ unghiul dintre diagonale, scriind aria trapezului ca fiind suma ariilor triunghiurilor ABC și BCD, obținem: $(a + b)h = d_1d_2 \sin \varphi$, de unde: $h = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{a + b}$. (1)

Din triunghiurile asemenea AMB şi CMD, deducem: $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{a}{b}$.

De aici rezultă: $MA = \frac{ad_1}{a+b}$, $MB = \frac{ad_2}{a+b}$.

Scriind teorema cosinusului în triunghiul AMB, rezultă: $a^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos \varphi$.

Înlocuind aici valorile segmentelor MA şi MB, obţinem: $\cos \varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2}{2d_1d_2}$,

$$\text{de unde: } \sin \varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left[\frac{d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2}{2d_1d_2}\right]^2} =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{4d_1^2d_2^2 - [d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2]^2} =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{[2d_1d_2 + d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2][2d_1d_2 - d_1^2 - d_2^2 + (a+b)^2]} =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{[(d_1+d_2)^2 - (a+b)^2][(a+b)^2 - (d_1-d_2)^2]} =$$

$$= \frac{1}{d_1d_2}\sqrt{(a+b+d_1+d_2)(a+b-d_1+d_2)(a+b+d_1-d_2)(d_1+d_2-a-b)}.$$

57. ***Să se calculeze unghiurile unui patrulater convex ale cărui laturi sînt a, b, c, d, şi aria $S = m^2$.***

Soluţie. Fie patrulaterul $ABCD$ ale cărui laturi sînt $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. Din triunghiurile ABD şi BCD, aplicînd teorema cosinusului, deducem: $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$, de unde: $ad \cos A - bc \cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$ sau, notînd $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2k^2$, $ad \cos A - bc \cos C = k^2$ şi scriind că aria patrulaterului este (1) suma ariilor triunghiurilor ABD şi BCD, obţinem: $ad \sin A + bc \sin C = 2m^2$. Din (1) şi (2) rezultă: $bc \sin C = 2m^2 - ad \sin A$, $bc \cos C = ad \cos A - k^2$. (2)

Ridicînd la pătrat şi adunînd, deducem: $b^2c^2 = 4m^2 + a^2d^2 + k^4 - 4adm^2 \sin A - 2adk^2 \cos A$, adică: $2m^2 \sin A + k^2 \cos A = \frac{k^4 + 4m^2 + a^2d^2 - b^2c^2}{2ad}$. (3)

Din această ecuaţie deducem valoarea unghiului A. Înlocuind aici pe $\sin A$ şi $\cos A$ în funcţie de $\mathrm{tg}\frac{A}{2}$, obţinem: $[(k^2 + ad)^2 + 4m^2 - b^2c^2]\,\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} - 8m^2ad\,\mathrm{tg}\frac{A}{2} + (k^2 - ad)^2 + 4m^2 - b^2c^2 = 0$.

Condiţia de realitate a rădăcinilor este: $16m^4a^2d^2 - [(k^2 + ad)^2 - b^2c^2 + 4m^2][(k^2 - ad)^2 - b^2c^2 + 4m^2] \geqslant 0$.

În mod analog obţinem celelalte unghiuri ale patrulaterului.

58. ***Într-un patrulater convex se dau trei laturi şi cele două unghiuri determinate de ele şi se cere să se calculeze a patra latură.***

Soluţie. Fie $BCDE$ un patrulater în care se dau laturile $BC = a$, $CD = b$, $EB = c$ şi unghiurile B şi C. Prelungim laturile CD şi BE pînă în punctul A şi notăm $DE = d$, $AE = x$, $AD = y$.

Din triunghiul ABC rezultă $A = 180° - (B + C)$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ABC, avem:

$$\frac{c+x}{\sin C} = \frac{b+y}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \text{ de unde:}$$

$$x = \frac{a \sin C}{\sin A} - c, \quad y = \frac{a \sin B}{\sin A} - b.$$

În triunghiul ADE, teorema cosinusului ne dă: $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$.

Înlocuind aici pe x şi y cu valorile lor, obţinem: $d^2 = \left(\frac{a \sin C}{\sin A} - c\right)^2 + \left(\frac{a \sin B}{\sin A} - b\right)^2 - 2\left(\frac{a \sin C}{\sin A} - c\right)\left(\frac{a \sin B}{\sin A} - b\right)\cos A$ sau: $d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + \frac{a^2}{\sin^2 A}(\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A) - \frac{2a}{\sin A}[c(\sin C - \sin B \cos A) + b(\sin B - \sin C \cos A)]$.

Avem: $\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos(B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + \sin^2 C (1 - \sin^2 B) + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = (\sin B \cos C + \sin C \cos B)^2 = \sin^2 (B + C) = \sin^2 A$.

De asemenea, avem: $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, deci: $\sin C - \sin B \cos A = \sin A \cos B$.

Analog: $\sin B - \sin C \cos A = \sin A \cos C$.

Cu aceste valori, obţinem: $d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + \frac{a^2}{\sin^2 A} \cdot \sin^2 A - \frac{2a}{\sin A}(c \sin A \cos B + b \sin A \cos C) = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2ac \cos B - 2ab \cos C$.

59. *În triunghiul ABC se notează cu A_1, B_1, C_1 picioarele înălţimilor şi se cere să se determine raportul dintre aria triunghiului $A_1B_1C_1$ şi aria triunghiului ABC, în funcţie de unghiurile triunghiului ABC.*

Soluţie. Avem de considerat două cazuri după cum triunghiul ABC are toate unghiurile ascuţite sau are un unghi obtuz.

În cazul întîi avem (fig. VI, 10):

$$S = S_{A_1B_1C_1} + S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}. \quad (1)$$

Dar: $S_{B_1AC_1} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin A}{2}$ şi, avînd în vedere că: $AB_1 = AB \cos A$, $AC_1 = AC \cos A$,

rezultă: $S_{B_1AC_1} = \frac{AB \cdot AC \sin A}{2} \cos^2 A = S \cos^2 A$.

Analog: $S_{C_1BA_1} = S \cos^2 B$, $S_{A_1CB_1} = S \cos^2 C$.

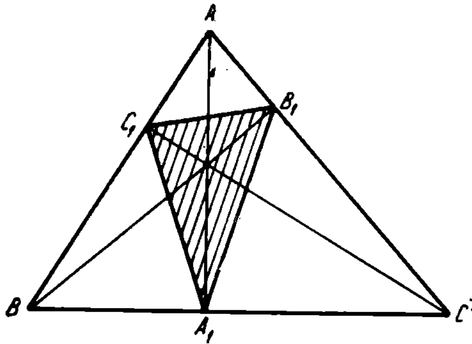


Fig. VI, 10.

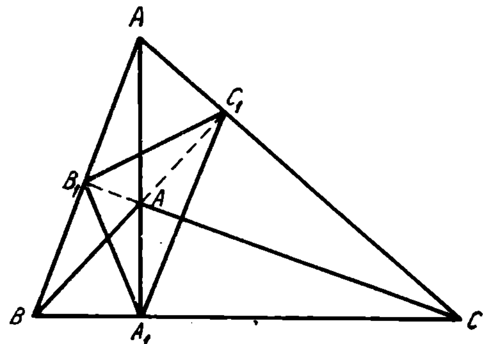


Fig. VI, 11.

Cu aceste valori relaţia (1) devine: $S = S_{A_1B_1C_1} + S(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$, adică $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$.

În cazul al doilea avem (fig. VI, 11): $S + S_{A_1B_1C_1} = S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}$, de unde deducem: $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$.

60. *Să se determine unghiurile unui triunghi dreptunghic, ştiind că raportul dintre raza cercului circumscris şi raza cercului înscris este $\frac{5}{4}$.*

Soluţie. Dacă notăm cu R raza cercului circumscris triunghiului ABC, avem (fig. VI, 12): $BC = 2R$.

De asemenea, notînd cu r raza cercului înscris triunghiului şi cu D punctul de contact al ipotenuzei BC cu cercul înscris, avem: $BD = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$, $CD = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$, deci:

$$BC = r\left(\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}\right).$$

Avînd în vedere valoarea de mai sus a lui BC, deducem: $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{5}{2}$.

Dar $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$, $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}$, deci obţinem ecuaţia: $2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{B}{2} + 2 = 0$.

De aici rezultă: $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = 2$.

Dar $\frac{B}{2} < 45°$, deci $\operatorname{tg} \frac{B}{2} < 1$. Rezultă că

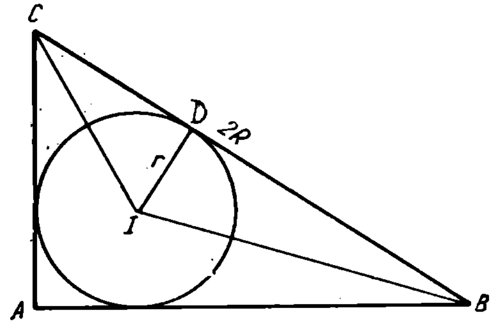


Fig. VI, 12.

singura soluţie acceptabilă este: $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$, de unde: $B = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 53°7'48''$ şi deci: $C = 36°52'12''$.

61. *Să se determine aria părţii comune la două cercuri secante de raze R_1 şi R_2 ştiind că distanţa dintre centre este d.*

Soluţie. Fie O_1 şi O_2 centrele celor două cercuri şi A şi B punctele lor de intersecţie (fig. VI, 13). Notăm: $\alpha = \widehat{AO_1O_2} = \widehat{BO_1O_2}$, $\beta = \widehat{AO_2O_1} = \widehat{BO_2O_1}$, α şi β fiind măsurate în radiani.

Cu această notaţie avem: aria sector. $O_1AB = R_1^2 \alpha$, aria sector. $O_2AB = R_2^2 \beta$.

De asemenea, avem: aria $O_1AO_2B = 2$ aria $O_1O_2A = 2 \frac{R_1 d \sin \alpha}{2} = R_1 d \sin \alpha$.

Deci, dacă notăm cu S aria căutată, rezultă:
$S = R_1^2\alpha + R_2^2\beta - R_1 d \sin \alpha$. (1)

Din triunghiul O_1O_2A deducem:

$$\cos \alpha = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2R_1 d}, \quad \cos \beta = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2R_2 d},$$

de unde rezultă: $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}{4R_1^2 d^2}}$.

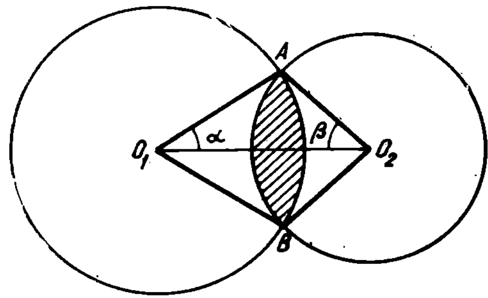


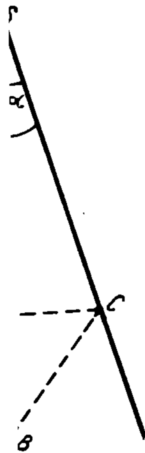
Fig. VI, 13.

$$\text{Deci: } S = R_1^2 \arccos \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2R_1 d} + R_2^2 \arccos \frac{d^2 - R_1^2 + R_2^2}{2R_2 d} -$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{4R_1^2 d^2 - (d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}.$$

ıd date cele trei fețe ale unui unghi triedru, să se calculeze unghiul diedru

Se consideră triedrul $SABC$ ($AB \perp SA$, $AC \perp SA$) ale căru :fețe sînt determınate e α, β, γ, și $SABC$ diedrul pe care vrem să-l măsurăm prin unghiul lui plan $\widehat{BAC}$



VI, 14.

Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul SBC, găsim: $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2\, SB \cdot SC \cos \alpha$, iar în triunghiul ABC: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$.

Egalînd cele două valori ale lui BC^2, obținem:

$$SB^2 - AB^2 + SC^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC \cos A - 2SB \cdot SC \cos \alpha = 0.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice SAB și SAC avem:

$$SB^2 - AB^2 = SA^2, \quad SC^2 - AC^2 = SA^2,$$

deci relația de mai sus devine:

$$SA^2 + AB \cdot AC \cos A - SB \cdot SC \cos \alpha = 0.$$

Din aceleași triunghiuri dreptunghice deducem:

$$AB = SA \operatorname{tg} \gamma, \; AC = SA \operatorname{tg} \beta, \; SB = \frac{SA}{\cos \gamma}, \quad SC = \frac{SA}{\cos \beta}.$$

Cu aceste valori rezultă: $\operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cos A = \dfrac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} - 1$,

adică: $\cos A = \dfrac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$.

găsi o formulă calculabilă prin logaritmi, să notăm $\alpha + \beta + \gamma = 2p$ și să calcu-
ım:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{\sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}} = \sqrt{\frac{\cos (\beta - \gamma) - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos (\beta + \gamma)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}}}.$$

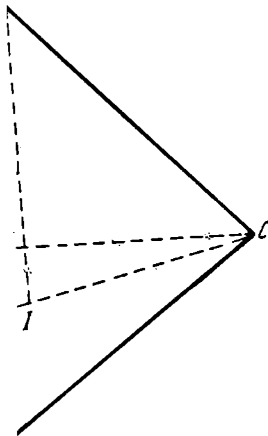


Fig. VI, 15.

Dar: $\alpha + \beta + \gamma = 2p, - \alpha + \beta + \gamma = 2(p - \alpha), \alpha - \beta + \gamma = 2(p - \beta), \alpha + \beta - \gamma = 2(p - \gamma)$,

deci: $\operatorname{tg} \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin (p - \beta) \sin (p - \gamma)}{\sin p \sin (p - \alpha)}}$.

63. *Se consideră un tetraedru regulat și se cere să se determine unghiul lui diedru și unghiul făcut de o muchie laterală cu baza.*

Soluție.

Fie tetraedrul $SABC$ de latură a. Notăm cu I proiecția punctului S pe planul ABC și cu D proiecția lui S pe AB (fig. VI, 15). Unghiul plan al diedrului $SABC$ este $\widehat{SDC} = \alpha$.

Avem: $\cos \alpha = \dfrac{DI}{DS}$.

$$= \frac{DC}{3} = \frac{a \cos 30^\circ}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ și: } DS = a \cos 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Deci: $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

Logaritmînd, găsim: $\lg\cos\alpha = \text{colg}\,3 = \overline{1},52288$, de unde: $\alpha = 70°31'44''$.

Unghiul dintre o muchie laterală şi bază este $\widehat{SCI} = \beta$. Avem: $\sin\beta = \frac{SI}{SC}$.

Dar: $SI = \sqrt{a^2 - IC^2}$, iar: $IC = \frac{2CD}{3} = \frac{2a\cos 30°}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, deci: $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Rezultă că: $\sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Logaritmînd, obţinem: $\lg\sin\beta = \frac{1}{2}\lg 6 + \text{colg}\,3 = \frac{1}{2}\cdot 0,77815 + \overline{1},52288 = \overline{1},91195$, deci: $\beta = 54°44'6''$.

64. *Se consideră un paralelogram $ABCD$ şi fie M un punct oarecare nesituat în planul paralelogramului. Să se demonstreze că diferenţa dintre suma pătratelor distanţelor de la M la două vîrfuri opuse şi suma pătratelor distanţelor la celelalte două vîrfuri este constantă.*

Soluţie. Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului şi $\alpha = \widehat{AOM}$. Din triunghiurile MAO şi MCO deducem: $MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO\cdot AO\cos\alpha$,

$$MC^2 = MO^2 + CO^2 - 2MO\cdot CO\cos(180° - \alpha),$$

sau, ţinînd seama că $CO = AO$ şi $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$; $MC^2 = MO^2 + AO^2 + 2MO\cdot AO\cos\alpha$.

De aici rezultă: $MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + 2AO^2$.

Analog, obţinem: $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + 2BO^2$, deci:

$$(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2) = 2(AO^2 - BO^2) = \text{const.}$$

65. *Se consideră în spaţiu patru puncte A, B, C, D, astfel încît: $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = \alpha$ şi $AB = BC = CD = DA = a$ şi se cere să se determine unghiul diedru $CABD$ şi volumul tetraedrului $ABCD$.*

Soluţie. Fie E proiecţia punctului C pe dreapta AB şi F punctul în care perpendiculara dusă în E pe AB intersectează dreapta AD (fig. VI, 16). Unghiul plan al diedrului $CABD$ este $\widehat{CEF} = \varphi$. Din triunghiul CEF deducem: $CF^2 = CE^2 + EF^2 - 2CE\cdot EF\cos\varphi$. În triunghiul ACD avem $AD = CD$, deci $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = \frac{180° - \alpha}{2}$.

Din triunghiul AFC obţinem: $CF^2 = AC^2 + AF^2 - 2AC\cdot AF\sin\frac{\alpha}{2}$.

Fig. VI, 16.

Egalînd cele două expresii ale lui CF^2 găsim: $CE^2 + EF^2 - 2CE\cdot EF\cos\varphi = AC^2 + AF^2 - 2AC\cdot AF\sin\frac{\alpha}{2}$,

de unde: $$\cos\varphi = \frac{CE^2 - AC^2 + EF^2 - AF^2 + 2AC\cdot AF\sin\frac{\alpha}{2}}{2\,CE\cdot EF}.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice AEC şi AEF deducem: $AC^2 - CE^2 = AE^2$, $AF^2 - EF^2 = AE^2$, deci: $\cos\varphi = \dfrac{AC\cdot AF\sin\frac{\alpha}{2} - AE^2}{CE\cdot EF}$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul ACD, obţinem: $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$, deci: $AC = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$.

Avem: $BE = a\cos\alpha$, deci: $AE = a - a\cos\alpha = a(1-\cos\alpha) = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Din triunghiul dreptunghic AEF găsim:

$$AF = \frac{AE}{\cos\alpha} = \frac{2a\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},\quad EF = AE\,\mathrm{tg}\,\alpha = 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic CEB avem: $CE = a\sin\alpha$.

Cu aceste valori obţinem:

$$\cos\varphi = \frac{2a\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\dfrac{2a\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} - 4a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}}{a\sin\alpha\cdot 2a\sin^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{4a^2\sin^4\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)}{2a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Fie H proiecţia punctului C pe dreapta EF. Din reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că CH este perpendiculară pe planul ABD. Volumul tetraedrului este deci:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABD}\cdot CH.$$

Dar: $S_{ABD} = \dfrac{AB\cdot AD\cdot\sin\alpha}{2} = \dfrac{a^2\sin\alpha}{2}$ şi: $CH = CE\sin\varphi = a\sin\alpha\sin\varphi$, deci: $V = \dfrac{a^3\sin^2\alpha\sin\varphi}{6}$.

$$\text{Dar: } \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{1-\mathrm{tg}^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos^4\frac{\alpha}{2} - \sin^4\frac{\alpha}{2}}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \text{deci: } V = \frac{a^3\sin^2\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{6} =$$

$$= \frac{4a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{6\cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \text{adică: } V = \frac{2a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{3}.$$

În cazul $\alpha = 60^\circ$, deci în cazul unui tetraedru regulat, avem: $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

66. *Să se determine volumul unui paralelipiped oblic în funcție de lungimile muchiilor și unghiurile dintre ele.*

Soluție. Fie paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ (fig. VI, 17), în care: $AA' = a$, $AB = b$, $AC = c$, $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{A'AC} = \beta$, $\widehat{A'AB} = \gamma$.

Notînd cu H proiecția lui A' pe planul $ABCD$, avem: $V = S_{ABCD} \cdot A'H$.

Dar: $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = bc \sin \alpha$,

deci: $V = bc \sin \alpha \cdot A'H \cdot$

Dacă notăm cu M și N proiecțiile lui A' pe laturile AB, respectiv AC, din reciproca întîi a teoremei celor trei perpendiculare deducem: $HM \perp AB$, $HN \perp AC$.

Rezultă că patrulaterul $AMHN$ este inscriptibil, fiind înscris în cercul de diametru AH.

Din triunghiul dreptunghic AHA', obținem: $A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - AH^2$.

Dar triunghiul AMN este înscris în același cerc ca și patrulaterul $AMHN$, deci teorema sinusurilor ne dă: $\dfrac{MN}{\sin \alpha} = AH$.

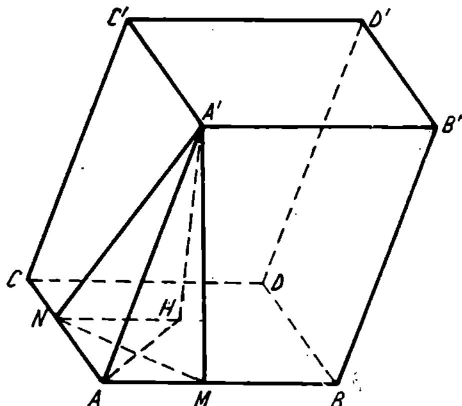


Fig. VI, 17.

Cu această valoare rezultă: $A'H^2 = a^2 - \dfrac{MN^2}{\sin^2 \alpha}$.

Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul AMN deducem: $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \alpha$.

Dar, din triunghiurile AMA' și ANA' rezultă: $AM = a \cos \gamma$, $AN = a \cos \beta$, deci:
$$MN^2 = a^2(\cos^2\beta + \cos^2\gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Cu această valoare, obținem: $A'H^2 = \dfrac{a^2}{\sin^2 \alpha}(\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) =$
$$= \frac{a^2}{\sin^2 \alpha}(1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Rezultă: $V = abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$.

Să transformăm expresia de sub radical într-un produs. Avem: $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1 - \cos \alpha - \cos^2 \beta(1 - \cos^2 \alpha) - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = (\sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)(\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) =$
$= [\cos \gamma - \cos (\alpha + \beta)] [\cos (\alpha - \beta) -$
$- \cos \gamma] = 2 \sin \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \dfrac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot$
$\cdot\, 2 \sin \dfrac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \dfrac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$.

Notînd $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, obținem: $\alpha + \beta - \gamma = 2(p - \gamma)$, $\alpha - \beta + \gamma = 2(p - \beta)$, $\beta + \gamma - \alpha = 2(p - \alpha)$, deci:

$$V = 2abc \sqrt{\sin p \sin (p - \alpha) \sin (p - \beta) \sin (p - \gamma)}.$$

67. *Un paralelipiped dreptunghic cu baza un pătrat se secționează cu un plan care trece prin diagonala bazei inferioare și unul din vîrfurile opuse ale bazei superioare, formînd o piramidă cu aria totală S* (fig. VI, 18). *Să se determine aria totală a paralelipipedului, știind că unghiul de la vîrful triunghiului obținut prin secțiune este α. Aplicație numerică:* $\alpha = 60°$.

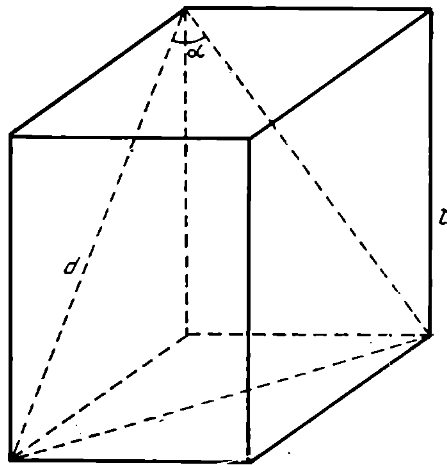


Fig. VI, 18.

Soluție. Dacă notăm cu S_1 aria secțiunii și cu A aria totală a paralelipipedului, atunci avem:

$$A = 4(S - S_1).$$

Fie a latura bazei, d lungimea diagonalei unei fețe laterale a paralelipipedului și l lungimea muchiei laterale a lui.

Avem: $a = d\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, $l = \sqrt{d^2 - a^2} = d\sqrt{1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}} = d\sqrt{\cos\alpha}$. De asemenea: $S_1 = \frac{d^2\sin\alpha}{2}$

Pe de altă parte: $S = S_1 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{la}{2}$, adică: $S = d^2\left(\frac{\sin\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}\right)$.

De aici deducem: $d^2 = \dfrac{S}{\dfrac{\sin\alpha}{2} + \sin^2\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.

Rezultă: $S_1 = \dfrac{S\sin\alpha}{\sin\alpha + 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + 2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.

Cu această valoare obținem: $A = 4S\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\dfrac{\alpha}{2} + \sin\dfrac{\alpha}{2} + \sqrt{2\cos\alpha}}$.

În cazul $\alpha = 60°$, obținem: $A = 2S(3 - \sqrt{3})$.

68. *O piramidă regulată, cu latura bazei egală cu a și unghiul diedru de la bază 2α, se secționează cu planul bisector al diedrului de la bază. Să se determine aria secțiunii.*

Soluție. Fie $VABCD$ piramida, P și N proiecțiile vîrfului V pe laturile AB, respectiv CD și C', M, D' punctele în care planul bisector al unghiului diedru de muchie AB intersectează dreptele VC, VN, VD (fig. VI, 19).

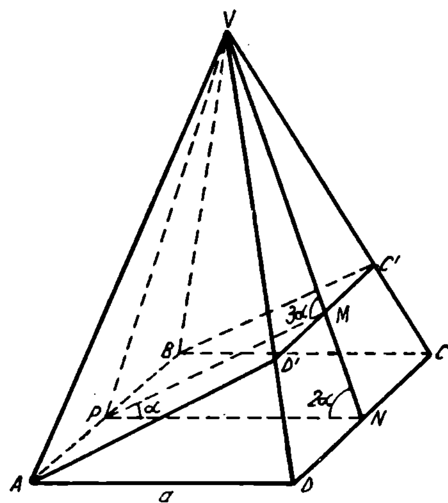


Fig. VI, 19.

Avem: $\widehat{VPM} = \widehat{MPN} = \alpha$, $\widehat{VNP} = 2\alpha$, $\widehat{VMP} = 3\alpha$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul VPM, obținem: $\frac{VM}{\sin\alpha} = \frac{VP}{\sin 3\alpha}$.

Din asemănarea triunghiurilor $VC'D'$ și VCD ($C'D' \parallel CD$) rezultă: $C'D' = CD\frac{VM}{VN}$.

Dar $VN = VP$ și, ținînd seama de relația de mai sus, deducem: $C'D' = a\frac{\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul MNP, găsim: $\frac{MP}{\sin 2\alpha} = \frac{NP}{\sin(180° - 3\alpha)}$,

de unde: $MP = a\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Cu aceste valori, deducem: $S = \dfrac{MP\,(AB + C'D')}{2} = \dfrac{1}{2}\, a\, \dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}\left(a + a\,\dfrac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}\right) =$

$= \dfrac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.$

69. *Se consideră o piramidă SABCD a cărei bază este un trapez isoscel cu laturile paralele $AD = a$ şi $BC = b$ $(a > b)$. Ştiind că înălţimea piramidei trece prin punctul O de intersecţie a diagonalelor trapezului şi că raportul dintre unghiurile diedre mărginite de laturile paralele ale bazei este 2, să se calculeze volumul piramidei în funcţie de a, b şi unghiul $\varphi = \widehat{COD}$.*

Soluţie. Fie E şi F proiecţiile punctului S pe laturile AD şi BC. Notînd $\widehat{SEO} = \alpha$, rezultă $\widehat{SFO} = 2\alpha$ (fig. VI, 20).

Avem: $SO = OF \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = OE \operatorname{tg} \alpha$.

Dar: $OF = \dfrac{b}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$, $OE = \dfrac{a}{2} \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}$,

deci: $a \operatorname{tg} \alpha = b \operatorname{tg} 2\alpha$. Avînd în vedere că $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, de aici rezultă: $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\dfrac{a - 2b}{a}}$.

Cu această valoare deducem:

$$SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}}.$$

De asemenea, avem: $EF = OE + OF = \dfrac{(a + b) \operatorname{tg} \dfrac{\varphi}{2}}{2}$, deci aria trapezului $ABCD$ este:

$$\mathcal{A} = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{2} = \frac{(a+b)^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

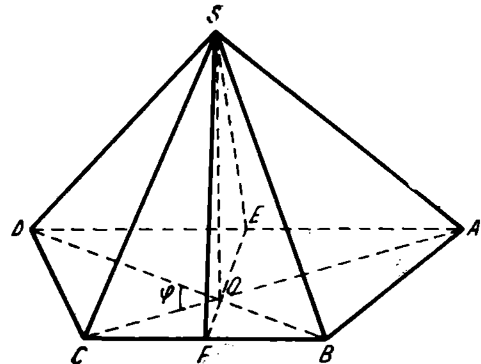


Fig. VI, 20

Rezultă: $V = \dfrac{a(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \dfrac{\varphi}{2} \sqrt{\dfrac{a-2b}{a}}$.

Problema este posibilă numai dacă $a > 2b$.

70. *Să se calculeze aria şi volumul corpului obţinut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei, în funcţie de ipotenuza a şi de suma catetelor l.*

Soluţie. Dacă notăm cu H proiecţia vîrfului A pe ipotenuza BC şi cu S şi V aria şi volumul corpului, avem: $S = \pi AH\,(AB + AC) = \pi l AH$, $V = \dfrac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \dfrac{\pi a}{3} AH^2$.

Dar: $AB = a \cos B$, $AC = a \sin B$,

deci: $AH = AB \sin B = a \sin B \cos B$.

Făcînd suma celor două catete obţinem: $a(\sin B + \cos B) = l$ sau: $\sin B + \cos B = \dfrac{l}{a}$.

Ridicînd la pătrat această relaţie, găsim: $\sin^2 B + \cos^2 B + 2 \sin B \cos B = \dfrac{l^2}{a^2}$, adică:

$\sin B \cos B = \dfrac{l^2 - a^2}{2a^2}$.

Deci: $AH = \dfrac{l^2 - a^2}{2a}$.

Cu această valoare deducem: $S = \frac{\pi l(l^2 - a^2)}{2a}$, $V = \frac{\pi(l^2 - a^2)^2}{12\,a}$.

71. *Un triunghi dreptunghic ABC se roteşte în jurul ipotenuzei BC. Să se determine în funcţie de ipotenuza a şi de unghiul ascuţit B aria şi volumul corpului obţinut. Pentru ce valoare a lui B volumul este maxim?*

Soluţie. Corpul obţinut este format din două conuri. Dacă notăm cu H proiecţia lui A pe BC şi $AH = h$, avem: $S = \pi h(b + c)$.

Dar: $b = a \sin B$, $c = a \cos B$, $h = c \sin B = a \sin B \cos B$,
deci: $S = \pi a^2 \sin B \cos B(\sin B + \cos B) = \pi a^2 \sin B \cos B\ [\sin B + \sin (90° - B)]$
$= 2\pi a^2 \sin B \cos B \sin 45° \cos (45° - B) = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \sin 2B \cos (45° - B)$.

Avem: $V = \frac{1}{3}\pi h^2 (BH + HC) = \frac{1}{3}\pi h^2 a = \frac{1}{3}\pi a^3 \sin^2 B \cos^2 B = \frac{\pi a^3}{12}\sin^2 2B$.

Volumul V este maxim cînd $\sin 2B$ este maxim, deci pentru $\sin 2B = 1$, adică: $B = 45°$.

În acest caz, avem: $S = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^2$, $V = \frac{\pi a^3}{12}$.

72. *Fie SAB un triunghi isoscel (SA = SB), A' şi B' două puncte pe laturile SA, respectiv SB, astfel încît A'B' || AB şi O şi O' să fie proiecţiile punctului S pe AB, respectiv pe A'B'. Notăm OA = r, SO = h,* $\widehat{A'OO'} = x$. *Se cere:*

1° *Să se determine aria laterală* S_l, *aria totală* S_t *şi volumul V ale conului obţinut prin rotirea triunghiului OA'B' în jurul înălţimii OO'.*

2° *Să se determine unghiul x, astfel încît raportul dintre* S_t *şi aria sferei de diametru OO' să fie egal cu k.*

Soluţie. 1° Dacă notăm $O'A' = r'$, $OO' = h'$, $OA' = l'$, avem: $r' = h' \operatorname{tg} x$, $l' = \frac{h'}{\cos x}$.

Din asemănarea triunghiurilor $SA'O'$ şi SAO deducem: $\frac{r'}{r} = \frac{h - h'}{h}$,
adică: $\frac{h' \operatorname{tg} x}{r} = \frac{h - h'}{h}$.

De aici deducem: $h' = \frac{rh \cos x}{r \cos x + h \sin x}$, deci: $r' = \frac{rh \sin x}{r \cos x + h \sin x}$,
$l' = \frac{rh}{r \cos x + h \sin x}$.

Cu aceste valori, avem: $S_l = \pi r' l' = \frac{r^2h^2 \sin x}{(r \cos x + h \sin x)^2}$, $S_t = \pi r'(l' + r') =$
$= \frac{\pi r h \sin x}{r \cos x + h \sin x}\left(\frac{rh \sin x}{r \cos x + h \sin x} + \frac{rh}{r \cos x + h \sin x}\right) = \frac{\pi r^2h^2 \sin x (1 + \sin x)}{(r \cos x + h \sin x)^2}$,
$V = \frac{1}{3}\pi r'^2 h' = \frac{r^3h^3 \sin^2 x \cos x}{(r \cos x + h \sin x)^3}$. 2° Aria sferei cu diametrul OO' este $\pi h'^2$, deci condiţia dată devine: $\frac{\sin x(1 + \sin x)}{\cos^2 x} = k$.

Dar $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$, deci obţinem ecuaţia: $\frac{\sin x}{1 - \sin x} = k$,

de unde: $\sin x = \frac{k}{k + 1}$.

Problema este totdeauna posibilă căci, k fiind un număr pozitiv, avem: $\frac{k}{k + 1} < 1$.

73. *Se consideră un semicerc de rază R şi de diametru AB. Fie C şi D două puncte pe semicerc, astfel încît* arc $AC = \alpha$, arc $AD = \beta$. *Se unesc punctele C şi D cu centrul O al semicercului şi se roteşte sectorul COD în jurul diametrului AB. Să se calculeze aria totală a sectorului sferic obţinut.*

Soluţie. Suprafaţa S căutată este formată din suprafeţele laterale S_1 şi S_2 ale conurilor determinate prin rotirea razelor OC şi OD şi aria S_3 a zonei sferice determinată prin rotirea arcului CD. Dacă notăm cu C' şi D' proiecţiile punctelor C şi D pe diametrul AB (fig. VI, 21) avem: $S_1 = \pi CC' \cdot OC$.

Dar $\widehat{COA} = \alpha$, deci $CC' = R \sin \alpha$. Cu această valoare deducem: $S_1 = \pi R^2 \sin \alpha$.

Analog: $S_2 = \pi R^2 \sin \beta$.

De asemenea: $S_3 = 2\pi R \cdot C'D'$ şi, ţinînd seama că: $C'D' = OD' - OC' = R(\cos \beta - \cos \alpha)$, găsim: $S_3 = 2\pi R^2(\cos \beta - \cos \alpha)$.

Rezultă:

$$S = \pi R^2(\sin \alpha + \sin \beta + 2 \cos \beta - 2 \cos \alpha).$$

Fig. VI, 21.

Vom transforma această expresie pentru a o face calculabilă prin logaritmi. Avem:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\text{deci}: S = 2\pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}\left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

Vom introduce unghiul auxiliar φ determinat de relaţia: $\operatorname{tg} \varphi = 2$.

$$\text{Cu aceasta deducem: } S = \frac{2\pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \varphi}\left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \varphi\right) =$$

$$= \frac{2R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - 2\varphi}{2}}{\cos \varphi} \text{ sau, ţinînd seama că } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}:$$

$$S = 2\sqrt{5}\, \pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - 2\varphi}{2}.$$

74. *Se consideră un semicerc cu centrul în O şi cu diametrul $AA' = 2R$. Printr-un punct C al semicercului ducem o coardă $CC' = 2x$ paralelă cu AA'. Se cere să se determine x astfel încît raportul dintre volumul trunchiului de con obţinut prin rotirea trapezului $AA'C'C$ în jurul razei $OB \perp AA'$ şi volumul segmentului sferic obţinut prin rotirea arcului AC în jurul aceleiaşi raze să fie egal cu $\sin \alpha$, α fiind un unghi ascuţit dat. Discuţie.*

Soluţie. Dacă notăm cu V_1 volumul trunchiului de con şi cu V_2 volumul segmentului sferic, avem (fig. VI, 22): $V_1 = \frac{1}{3} \pi OD(R^2 + x^2 + Rx) =$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2}\, (R^2 + x^2 + Rx),$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \pi OD^3 + \frac{1}{2} \pi OD\, (R^2 + x^2) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2}\, (2R^2 + x^2).$$

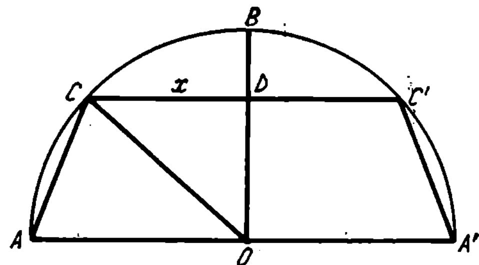


Fig. VI, 22.

$$\text{Condiţia problemei se scrie: } \frac{\frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2}\, (R^2 + x^2 + Rx)}{\frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2}\, (2R^2 + x^2)} = \sin \alpha.$$

Pentru ca rădăcinile acestei ecuaţii să fie reale trebuie ca: $R^2 - 4R^2(1 - \sin\alpha)(1 - 2\sin\alpha) \geqslant 0$ sau: $8\sin^2\alpha - 12\sin\alpha + 3 \leqslant 0$.

Ţinînd seama că $0 < \sin\alpha < 1$, de aici rezultă: $\frac{3-\sqrt{3}}{3} < \sin\alpha < 1$. (2)

Dacă notăm cu S şi P suma şi produsul rădăcinilor ecuaţiei (1), avem:

$$S = -\frac{R}{1-\sin\alpha} < 0, P = R^2\frac{1-2\sin\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

Dacă $P > 0$, ecuaţia (1) are două rădăcini negative, deci neacceptabile. Rezultă că trebuie să avem $P < 0$, adică: $\frac{1}{2} < \sin\alpha < 1$.

Dacă această condiţie este satisfăcută, atunci şi condiţia (2) este satisfăcută, căci:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}.$$

Deci trebuie să avem: $30° < \alpha < 90°$.

75. *Se dă un cerc cu centrul în punctul O şi de rază R. Printr-un punct A de pe cerc se duc diametrul AB şi o coardă AC. Să se determine poziţia coardei AC, astfel încît:*

1° *Raportul dintre aria calotei sferice determinate prin rotirea arcului AC în furul diametrului AB şi aria laterală a conului obţinut prin rotirea coardei AC să fie un număr dat k.*

2° *Aria laterală a conului de la 1° să fie egală cu aria calotei obţinute prin rotirea arcului BC.*

Soluţie. 1° Fie D proiecţia punctului C pe diametrul AB. Notînd cu S_1 aria conului şi cu S_2 aria calotei, avem: $S_1 = \pi\, CD \cdot AC$, $S_2 = 2\pi R \cdot AD$.

Dar, dacă notăm $\widehat{CAB} = x$, avem: $AC = 2R\cos x$, $CD = AC\sin x = 2R\sin x\cos x$, $AD = AC\cos x = 2R\cos^2 x$, deci: $S_1 = 4R^2\pi\sin x\cos^2 x$, $S_2 = 4R^2\pi\cos^2 x$.

Rezultă: $\frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\sin x}$.

Unghiul x este determinat de ecuaţia: $\sin x = \frac{1}{k}$ şi problema este posibilă dacă $k \geqslant 1$.

2° Notînd cu S_3 aria calotei determinată prin rotirea arcului BC, avem: $S_3 = 2\pi R \cdot BD$. Dar: $BD = 2R - AD = 2R - 2R\cos^2 x = 2R\sin^2 x$, deci: $S^3 = 4R^2\pi\sin^2 x$.

Condiţia $S_1 = S_3$ devine: $\sin x\cos^2 x = \sin^2 x$ sau, ţinînd seama că $\sin x \neq 0$: $\cos^2 x = \sin x$, adică: $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$.

Avînd în vedere că $0 < \sin x \leqslant 1$, de aici rezultă: $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, deci: $x = 38°10'21''$.

76. ***Să se determine conul circumscris unei sfere de rază R, care să aibă aria totală minimă.***

Soluţie. Dacă notăm cu x raza, cu y înălţimea, cu z generatoarea conului şi cu 2α unghiul de la vîrf al secţiunii axiale, atunci avem: $y = R + \frac{R}{\sin\alpha} = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$; $x = y\,\mathrm{tg}\,\alpha =$

$$= \frac{R(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha};\ z = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{R(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Aria totală a conului este: $S = \pi(x^2 + xz) = \pi\left(x^2 + \frac{x^2}{\sin\alpha}\right) = \frac{\pi R^2(1+\sin\alpha)^2}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}$.

Dacă notăm: $\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\sin\alpha(1 - \sin \alpha)} = m$, atunci: $S = \pi R^2 m$ şi aria totală este minimă o dată cu m. (1)

Din (1) rezultă: $(m + 1) \sin^2 \alpha - (m - 2) \sin \alpha + 1 = 0$. (2)

Dar această ecuaţie trebuie să aibă rădăcini reale, deci: $(m - 2)^2 - 4(m + 1) \geqslant 0$, adică: $m^2 - 8m \geqslant 0$ şi, avînd în vedere că $m > 0$, rezultă: $m \geqslant 8$.

Rezultă că valoarea minimă a lui m este 8. Pentru această valoare, din (2) deducem: $\sin \alpha =$

$$= \frac{1}{3}, \text{ adică: } \alpha = 19°28'17''.$$

Cu această valoare avem: $y = 4R$, $x = R\sqrt{2}$, $z = 3\sqrt{2}R$, $S = 8\pi R^2$.

Exerciţii şi probleme propuse

1. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic avem următoarele relaţii:

a) $\sin 2B = \frac{4S}{a^2}$; b) $\operatorname{ctg} B + \operatorname{cosec} B = \frac{a + c}{b}$;

c) $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{S}{p^2}$; d) $\sin (B - C) = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$.

2. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC, în care se dau:

a) $a = 57{,}54$, $B = 44°55'$;
b) $a = 163{,}2$, $B = 40°22'$;
c) $b = 50{,}94$, $B = 43°48'$;
d) $b = 29{,}54$, $B = 25°37'$;
e) $a = 9{,}994$, $b = 5{,}752$;
f) $a = 176$, $b = 160{,}5$;
g) $b = 415{,}3$, $c = 62{,}08$;
h) $b = 141$, $c' = 181{,}2$.

3. Să se rezolve triunghiul dreptunghic ABC în care se dau:

a) $b + c = 252{,}4$, $b - c = 7{,}60$; b) $a = 225$, $\frac{c}{b} = 0{,}75$; c) $a = 4765{,}35$, $b + c = 6642{,}777$.

4. Să se rezolve un triunghi dreptunghic în care se dau cateta b şi diferenţa $a - c = d$.

5. Într-un triunghi dreptunghic ABC se dă $\frac{b}{2} = 2 + \sqrt{3}$ şi se cere să se determine unghiurile B şi C, calculînd în prealabil $\cos (B - C)$.

6. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem următoarele relaţii:

a) $$\frac{a \sin \frac{B - C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C - A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A - B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 0;$$

b) $$\frac{a^2 \sin (B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin (C - A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin (A - B)}{\sin A + \sin B} = 0;$$

c) $$\frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2}{4abc};$$

d) $$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{p - a} \operatorname{ctg} \frac{A}{2};$$

e) $\frac{a\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{b\sin\frac{C-A}{2}}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{c\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=0;$

f) $\frac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\frac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\frac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$

7. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare ABC, avem:

$$\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}=\frac{r}{R}.$$

8. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem: $\frac{\cos A-\cos B\cos C}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B-\cos A\cos C}{\sin A\sin C}+$

$$+\frac{\cos C-\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=1.$$

9. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC este satisfăcută una dintre relaţiile:

a) $\sin 2B+\sin 2C=\frac{2S}{R^2}$,

b) $\sin C=\cos A+\cos B$

c) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$,

triunghiul este dreptunghic.

10. Să se demonstreze că dacă în triunghiul ABC este satisfăcută una dintre relaţiile:

a) $\sin A=2\sin B\cos C$,

b) $a=2b\sin\frac{A}{2}$,

c) $\frac{2\sin A\sin B}{\sin C}=\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$,

d) $\cos A=\frac{Ra}{2S}$,

e) $\cos\frac{A}{2}=\frac{a(b+c)}{4S}$,

f) $p=2R\cos\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)$,

triunghiul este isoscel.

11. Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau:

a) $a=91{,}25$, $B=35°45'$, $C=42°28'$;
b) $a=274{,}5$, $A=33°18'$, $C=82°48'$;
c) $b=13{,}02$, $A=11°48'$, $B=133°42'$;
d) $c=15{,}94$, $A=51°38'$, $B=18°19'$;
e) $a=510$, $b=317$, $C=76°19'$;
f) $a=514{,}1$, $b=362$, $C=60°12'$;
g) $a=33{,}9$, $b=54{,}6$, $C=31°10'$;
h) $b=28$, $c=42$, $A=124°$.

12. Să se rezolve triunghiul ABC, în care:

a) $a=26{,}73$, $b=22{,}98$, $A=63°$;
b) $a=26{,}73$, $b=28{,}97$, $A=63°$;
c) $a=20$, $b=23$, $A=76°$;
d) $a=34$, $b=93$, $A=14°15'$;
e) $a=635$, $b=824$, $c=429$;
f) $a=542{,}7$, $b=621{,}4$, $c=693{,}5$;
g) $a=19$, $b=34$, $c=49$;
h) $a=421{,}6$, $b=409{,}8$, $c=335{,}9$.

13. Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau a, A şi relaţia $b(b+c)=k^2$.

14. Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau unghiul A, diferenţa $b-c=l$ şi înălţimea h coborîtă din vîrful A.

15. Să se rezolve triunghiul ABC, în care se dau unghiul A, înălţimea h coborîtă din vîrful A şi raza R a cercului circumscris.

16. Să se rezolve un triunghi în care se dau un unghi, perimetrul $2p$ şi aria

$$S=\frac{k^2}{2}.$$

17. Să se rezolve triunghiul ABC în care se dau razele R și r, știind că $a^2 + b^2 + c^2 = 8 R^2$.

18. Să se rezolve un triunghi în care se dau o latură, aria și raza cercului circumscris.

19. Să se rezolve un triunghi cunoscînd suma a două laturi, înălțimea corespunzătoare celei de-a treia laturi și raza cercului circumscris.

20. Să se rezolve un triunghi cunoscînd razele cercurilor exînscrise.

21. Să se rezolve un triunghi cunoscînd un unghi, raza cercului circumscris și distanța dintre centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris.

22. Fiind dat un triunghi și cercul înscris în el se duc la el tangentele paralele cu laturile triunghiului. Se formează astfel trei triunghiuri interioare primului. Să se arate că:
1° suma razelor cercurilor înscrise în cele trei triunghiuri interioare este egală cu raza cercului înscris în triunghiul dat;
2° produsul ariilor celor patru triunghiuri este egal cu puterea a opta a aceleiași raze.

23. Se consideră un cerc de rază R și un punct A situat la distanța $d > R$ de centrul cercului. Să se ducă prin punctul A o secantă, astfel încît suma pătratelor segmentelor cuprinse între acest punct și punctele de intersecție cu cercul să fie egală cu m^2.

24. Fie xOy un unghi a cărui mărime este 2α și M un punct pe bisectoarea lui. Să se ducă prin acest punct o dreaptă, astfel încît dacă notăm cu A și B punctele în care ea intersectează laturile Ox, respectiv Oy ale unghiului, să avem $AM + MB = a$.

25. Fie xOy un unghi drept și M un punct situat la distanțele a și b de laturile unghiului. Să se ducă prin M o dreaptă care să intersecteze laturile Ox și Oy în punctele A, respectiv B, astfel încît $MA^2 + MB^2 = k^2$.

26. Fiind date un cerc de rază R, o coardă AB de lungime $R\sqrt{3}$ și o coardă AC, care face cu AB unghiul α, se cere să se rezolve triunghiul ABC și să se determine apoi unghiul α cu condiția $AC^2 - BC^2 = mR^2$, $(m > 0)$.

27. Se consideră un segment AB al cărui mijloc este D. Prin D se duce o dreaptă DC, care face cu AB un unghi α. Să se determine lungimea segmentului DC, știind că $\widehat{BCD} = 2\,\widehat{ACD}$.

28. Se consideră un semicerc de diametru $AB = 2R$ și fie AD o coardă a semicercului care face cu AB unghiul $2\,\alpha$ și C mijlocul arcului BD. Să se calculeze în funcție de R și α laturile și diagonalele patrulaterului $ABCD$ și să se determine unghiul α astfel încît perimetrul patrulaterului să fie egal cu $4\,Rm$.

29. Pe un cerc cu centrul în O și cu raza R se consideră un punct fix A și tangenta la cerc în acest punct. Pe această tangentă se ia un punct B, astfel încît $AB = a$. Se unește punctul B cu un punct M mobil pe cerc și se cere:

1° să se calculeze lungimea segmentului BM în funcție de R și de $\varphi = \widehat{AOM}$;
2° să se determine unghiul φ astfel încît $BM = l$.

30. Se consideră un sfert de cerc AOB și fie AT tangenta în punctul A. Notăm cu M un punct oarecare pe arcul AB și cu N punctul în care dreapta OM intersectează tangenta AT. Să se determine $\widehat{AOM}$ astfel încît $MN = kMA$, $(k = \text{const.})$.

31. Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A, în care $B = 30°$ şi înălţimea $AH = h$. Să se determine un punct P pe cateta AB şi unul Q pe cateta AC, astfel încît $\widehat{PHA} = \widehat{QHA}$ şi

$$\frac{1}{HP} + \frac{1}{HQ} = \frac{2m}{h} (m = \text{const.}).$$

32. Să se determine numărul de laturi al unui poligon regulat, ştiind că raportul dintre aria lui şi aria poligonului regulat asemenea cu acesta, circumscris cercului în care este înscris primul, este $\frac{3}{4}$.

33. Să se calculeze aria unui trapez isoscel a cărui înălţime este h, ştiind că latura neparalelă este văzută din centrul cercului circumscris trapezului sub unghiul α.

34. În interiorul unui poligon regulat cu n laturi, de latură a, se înscriu n cercuri egale, astfel încît fiecare cerc să fie tangent la două laturi consecutive ale poligonului şi la alte două cercuri. Să se determine aria figurii mărginită de cercurile considerate.

35. În triunghiul ABC, pe latura BC se ia un punct D şi se construiesc cercurile circumscrise triunghiurilor ACD şi BCD. Să se demonstreze că raportul razelor acestor cercuri este constant. Să se determine poziţia punctului D pentru care aceste raze au valoarea minimă.

36. O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ are ca bază pătratul $ABCD$ şi înălţimea de lungime h. Să se determine unghiul dintre înălţimea piramidei şi planul VAB, ştiind că aria triunghiului VAB este h^2.

37. Se consideră o piramidă regulată avînd ca bază un hexagon regulat cu latura a şi ale cărei muchii laterale sînt egale cu latura triunghiului echilateral înscris în acelaşi cerc cu baza. Să se afle valoarea unghiului dintre o faţă laterală şi bază.

38. Se dau două drepte necoplanare, care fac între ele unghiul α şi a căror perpendiculară comună AB are lungimea h. Să se determine pe cele două drepte, două puncte C, respectiv O, astfel încît tetraedrul $ABCD$ să aibă volumul a^3 şi segmentul CD să aibă lungimea l.

39. Se consideră un unghi drept xOy. Prin punctul O se duce în planul unghiului un segment OA de lungime a, situat în interiorul unghiului, astfel încît $\widehat{xOA} = \varphi$. Notăm cu B şi C proiecţiile lui A pe Ox şi Oy. Să se determine aria totală a cilindrului obţinut prin rotirea dreptunghiului $OBAC$ în jurul dreptei Ox.

40. Două conuri circulare drepte opuse la bază sînt înscrise în aceeaşi sferă de rază R. Să se determine aceste conuri astfel încît diferenţa dintre volumele celor două conuri să fie maximă.

41. Să se circumscrie unui semicerc de rază R un trapez isoscel $ABCD$, ($AD =$ = baza mare), astfel încît raportul dintre volumul obţinut prin rotirea trapezului în jurul bazei AD şi aria sferei obţinute prin rotirea semicercului să fie k.

Capitolul **7**

Lucrări practice

1. **Unghi orizontal** este **unghiul măsurat în planul orizontului**, care trece prin ochiul observatorului, între direcţiile la **două obiecte**. În figura VII, 1, $\alpha = \widehat{AOB}$ este unghiul orizontal măsurat din punctul de **observaţie** O, între obiectele A şi B.

2. **Unghi vertical** este unghiul măsurat în **planul vertical**, de la planul orizontului pînă la direcţia la obiect (vîrful obiectului). În figura VII, 2, $h = \widehat{BOA}$ este unghiul vertical măsurat din punctul de observaţie O, între baza obiectului B, situată în planul orizontului şi vîrful obiectului A.

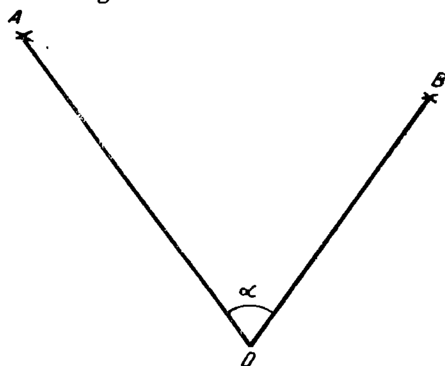


Fig. VII, 1

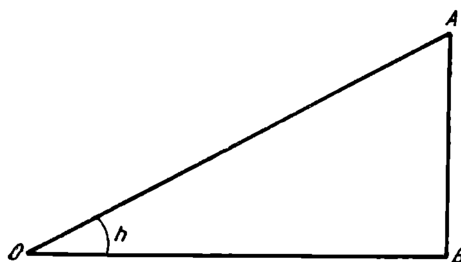


Fig. VII, 2.

Probleme rezolvate

1. *De la o distanţă de* 68 m *de baza unui turn, se măsoară la vîrful lui un unghi vertical de* 42°25′. *Ştiind că înălţimea ochiului observatorului deasupra orizontului este de* 1,75 m *să se calculeze înălţimea turnului* (fig. VII, 3).

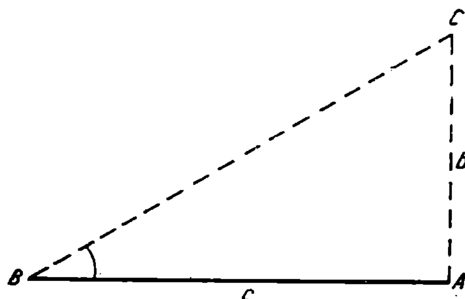


Fig. VII, 3.

Soluție. $b = c \operatorname{tg} B$;

$$\begin{array}{r} \lg c = 1{,}83251 \\ \lg \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}96078 \\ \hline \lg b = 1{,}79329 \\ b = 62{,}13 \text{ m} \end{array}$$

Adunînd 1,75 m, obținem $AB = 63{,}88$ m.

2. *Se măsoară un unghi vertical de* 32°17′ ***la vîrful unui turn a cărui bază este inaccesibilă,*** *dar așezată pe un teren* ***orizontal; înaintînd*** 15 m ***către turn se mai măsoară un unghi vertical de*** 45°30′. ***Știind că ochiul observatorului este*** *la* 1,30 m ***deasupra orizontului se cere înălțimea turnului*** (fig. VII, 4).

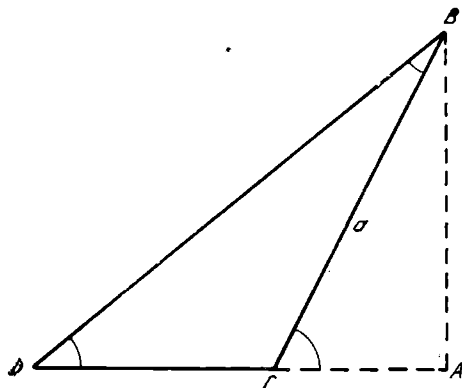


Fig. VII, 4.

1. $\widehat{BDC} = 32°17'$
2. $\widehat{BCA} = 45°30'$
3. $DC = 15$ m
4. $AB = ?$

Soluție. $\widehat{CBD} = 13°13'$. În $\triangle BDC$: $BC = a = \dfrac{CD \sin D}{\sin \widehat{CBD}}$.

Dar în ΔABC, $AB = a \sin C$, deci $AB = \dfrac{CD \sin D \sin C}{\sin \widehat{CBD}}$.

$$\begin{array}{r} \lg CD = 1{,}17609 \\ \lg \sin D = 1{,}72763 \\ \lg \sin C = \bar{1}{,}85324 \\ \operatorname{colg} \sin \widehat{CBD} = 0{,}64086 \\ \hline \lg AB = 1{,}39782 \\ AB = 24{,}99. \end{array}$$

Adunînd 1,30 m, obținem $AB = 26{,}29$ m.

3. *Să se calculeze distanța de la un* ***punct A la un*** *punct inaccesibil C. Pe o perpendiculară în punctul A pe AC se alege* ***un punct B, din care se văd*** *punctele A* ***și C.***

Se măsoară unghiul orizontal $\widehat{ABC} = 38°24'$ și distanța $AB = 62$ m (fig. VII,5).

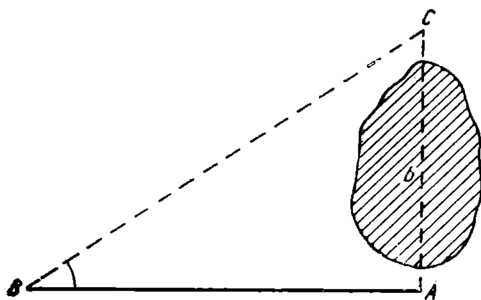


Fig. VII, 5.

Soluție. $b = c \operatorname{tg} B$

$$\begin{array}{r} \lg c = 1{,}79239 \\ \lg \operatorname{tg} B = \bar{1}{,}89905 \\ \hline \lg b = 1{,}69144 \\ AC = b = 49{,}14 \text{ m} \end{array}$$

4. ***Să se calculeze distanța de la un punct A la un punct inaccesibil C. Pe o dreaptă ce trece prin A se alege un punct convenabil B, din care se văd punctele A***

şi C. Se măsoară unghiurile orizontale $\widehat{BAC} = 58°27'$ *şi* $\widehat{ABC} = 63°34'$, *precum, şi distanţa* $AB = 63{,}25$ m (fig. VII,6).

Soluţie. $C = 180° - (A + B)$. Din relaţia $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$, deducem: $b = \frac{c \sin B}{\sin C} =$

$= \frac{c \sin B}{\sin [180° - (A + B)]}$, deci: $b = \frac{c \sin B}{\sin (A + B)}$.

$\lg c = 1{,}80106$
$\lg \sin B = \bar{1}{,}95204$
$\text{colg} \sin (A + B) = 0{,}07166$

$\lg b = 1{,}82476$
$AC = b = 66{,}80$ m.

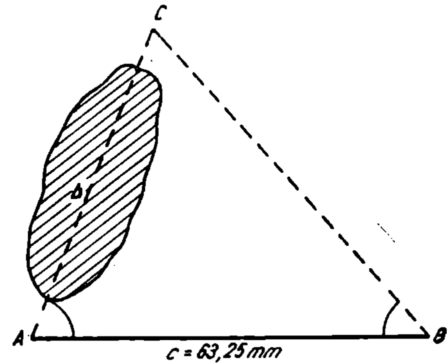


Fig. VII, 6.

5. *Din două puncte situate la o distanţă de* 1 675 m *se măsoară simultan, la un punct caracteristic al unui nor, două unghiuri verticale de* 70° *respectiv* 82°. *Ştiind că punctele de observare au acelaşi orizont şi că ele împreună cu norul sînt situate într-un plan vertical, să se calculeze înălţimea norului* (fig. VII, 7).

Soluţie. $AC = \frac{BC \sin B}{\sin \widehat{BAC}}$ şi $AD = AC \sin C$; rezultă: $AD = \frac{BC \sin B \sin C}{\sin \widehat{BAC}}$, de unde:

$\lg BC = 3{,}22401$
$\lg \sin B = \bar{1}{,}99575$
$\lg \sin C = \bar{1}{,}97299$
$\text{colg} \sin \widehat{BAC} = 0{,}32839$

$\lg AD = 3{,}52114$
$AD = 3320$ m.

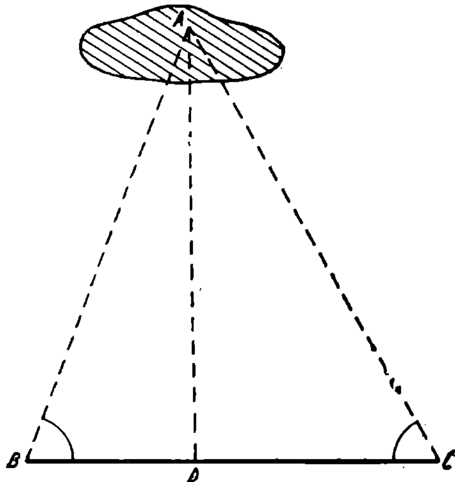


Fig. VII, 7.

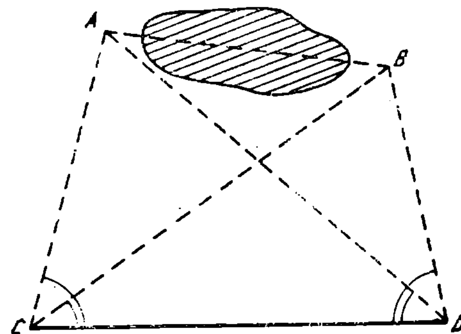


Fig. VII, 8.

6. *Să se calculeze distanţa dintre două puncte vizibile A şi B, dar inaccesibile, cunoscînd baza* $CD = 2\,722$ m *şi unghiurile orizontale* $\widehat{BCD} = 41°24'$, $\widehat{ACD} = 54°18'$, $\widehat{ADC} = 37°24'$ *şi* $\widehat{BDC} = 83°15'$ (fig. VII,8).

Soluţie.

Calculăm $\widehat{CAD}$ şi AC în $\Delta\ ADC$.

$$\widehat{CAD} = 180° - (\widehat{ACD} + \widehat{ADC})$$

$$\widehat{CAD} = 88°18';$$

$$AC = b = \frac{CD \sin \widehat{ADC}}{\sin \widehat{CAD}}$$

$$\lg CD = 3{,}43489$$

$$\lg \sin \widehat{ADC} = \bar{1}{,}78346$$

$$\text{colg} \sin \widehat{CAD} = 0{,}00019$$

$$\lg b = 3{,}21854.$$

Calculăm $\widehat{CBD}$ şi BC în ΔBCD.

$$\widehat{CBD} = 180° - (\widehat{BDC} + \widehat{BCD})$$

$$\widehat{CBD} = 55°21';$$

$$BC = a = \frac{CD \sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$$

$$\lg CD = 3{,}43489$$

$$\lg \sin \widehat{BDC} = \bar{1}{,}99698$$

$$\text{colg} \sin \widehat{CBD} = 0{,}08479$$

$$\lg a = 3{,}51666.$$

Calculăm unghiurile A şi B în ΔABC.

$$\text{tg} \frac{A-B}{2} = \text{tg}\,(45° - \varphi)\ \text{ctg} \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2} C = 6°27'; \ \text{tg}\,\varphi = \frac{a}{b}$$

$$\lg \text{tg}\,\varphi = \lg a - \lg b = 0{,}2981$$

$$\varphi = 63°17'$$

$$\varphi - 45° = 18°17'$$

$$\lg \text{tg}\,(45° - \varphi) = \bar{1}{,}51903$$

$$\lg \text{ctg} \frac{1}{2} C = 0{,}94672$$

$$\lg \text{tg} \frac{A-B}{2} = 0{,}46575$$

$$\frac{1}{2}(A - B) = 71°07'.$$

$$\text{Dar: } \frac{1}{2}(A + B) = 83°33'.$$

Rezultă:

$$A = 155°40',$$

$$B = 11°26'.$$

Calculăm pe AB în ΔABC:

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}$$

$$\begin{aligned} \lg AC &= 3,21854 \\ \lg \sin C &= \bar{1},34879 \\ \text{colg} \sin B &= 0,70284 \\ \hline \lg AB &= 3,27017 \\ AB &= 1\,863 \text{ m}. \end{aligned}$$

7. *La poalele unui deal al cărui vîrf este A, se consideră o distanță* $BC = 225$ m. *Notînd cu P proiecția lui A pe planul orizontului, se măsoară unghiul vertical* $\widehat{PCA} = 47°40'$, *precum și unghiurile* $\widehat{ACB} = 52°27'$ *și* $\widehat{ABC} = 41°20'$. *Știind că înălțimea ochiului observatorului este de* 1,45 m, *se cere înălțimea dealului AP* (fig. VII, 9).

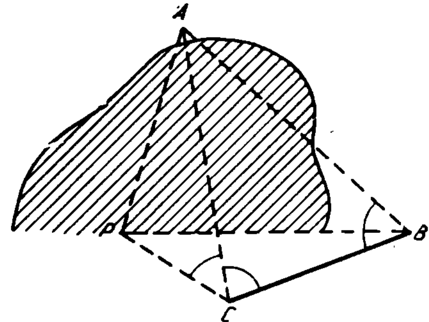


Fig. VII, 9.

Soluție. Din triunghiul *ABC*, avem:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{CAB}},$$

de unde:

$$AC = \frac{BC \sin \widehat{ABC}}{\sin [180° - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})]} = \frac{BC \sin \widehat{ABC}}{\sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})}.$$

Dar, din triunghiul *APC* avem: $AP = AC \sin \widehat{PCA}$,

deci: $AP = \dfrac{BC \sin \widehat{ABC} \sin \widehat{PCA}}{\sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})}$;

$$\begin{aligned} \lg BC &= 2,35218 \\ \lg \sin \widehat{ABC} &= \bar{1},81983 \\ \lg \sin \widehat{PCA} &= \bar{1},86879 \\ \text{colg} \sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC}) &= 0,00095 \\ \hline \lg AP &= 2,04175 \\ AP &= 110,10 \text{ m}. \end{aligned}$$

Adunînd 1,45 m, obținem $AP = 111,55$ m.

8. *Un observator măsoară un unghi vertical* α *la orizontul mării, dintr-un punct A, de pe acoperișul unui bloc situat pe țărm. Cunoscînd raza R a Pămîntului, să se calculeze înălțimea blocului* (fig. VII, 10).

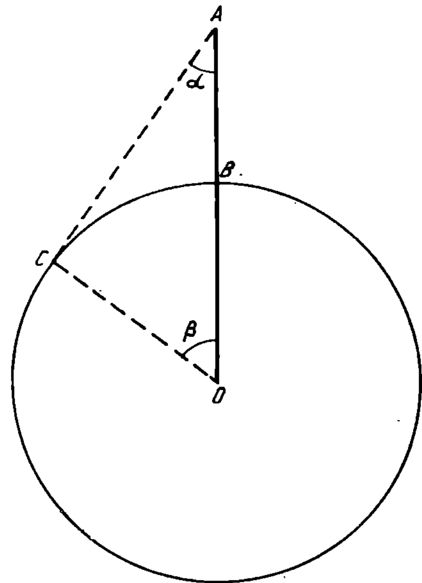


Fig. VII, 10.

Soluție. Notăm înălțimea blocului $AB = x$, unghiul vertical $\widehat{CAO} = \alpha$ și complementul său cu β, avem:

$$R = OA \cos \beta = (R + x) \cos \beta,$$

de unde: $x = \dfrac{R(1 - \cos \beta)}{\cos \beta}$, deci: $x = \dfrac{2R \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}$.

9. *Un observator vede de pe malul unui rîu vîrful unui copac, situat pe malul opus, sub un unghi vertical de* 60°. *Depărtîndu-se perpendicular pe mal, la o distanță*

40 m, *unghiul vertical se reduce la jumătate. Se cere lăţimea rîului şi înălţimea* *›acului* (fig. VII, 11).

Soluţie. Se observă că: $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 30°$.
zultă: $AC = AD = 40$ m, deci: $BC = AC \sin 60° = 20\sqrt{3}$ m şi: $AB = AC \cos 60° = 20$ m.

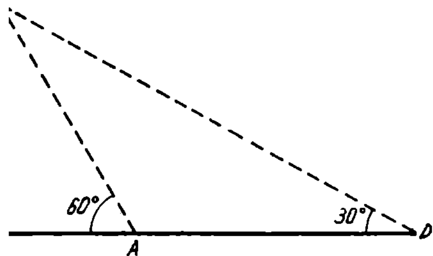


Fig. VII, 11

10. *Să se calculeze înălţimea unei statui aşezată pe un piedestal situat într-un loc inaccesibil* (fig. VII, 12).

Soluţie. Fie o bază AB care se poate măsura situată în planul orizontal şi în acelaşi plan vertical cu statuia.

Se măsoară din A unghiurile verticale ale punctelor D şi E şi din B unghiul vertical al punctului E.

Observăm că: $\widehat{AEB} = \widehat{CAE} - \widehat{CBE}$,

deci: $AE = \dfrac{AB \sin \widehat{ABE}}{\sin \widehat{AEB}}$ · Dar: $\widehat{DAE} = \widehat{EAC} - \widehat{DAC}$,

deci: $DE = \dfrac{AE \sin \widehat{DAE}}{\sin \widehat{ADE}}$.

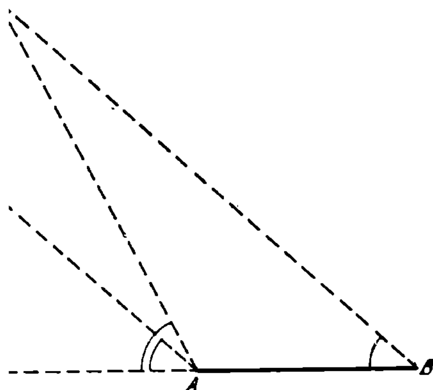


Fig. VII, 12

11. *Un stîlp vertical este văzut din trei puncte A, B, C aflate pe aceeaşi orizontală care trece prin piciorul stîlpului, respectiv sub unghiurile $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$. Cunoscînd distanţele $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ să se afle înălţimea x a stîlpului şi să se demonstreze că dacă* $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{1}{3}$, *atunci avem* $5a = 13b$ (fig. VII, 13).

Soluţie. a) $\widehat{EBD} = \widehat{AEB} + \widehat{BAE}$.

Dar: $\widehat{EBD} = 2\alpha$ şi $\widehat{BAE} = \alpha$.

Rezultă: $\widehat{AEB} = \alpha$, deci: $BE = a$. În $\Delta\, BDE$ avem:

$x = a \sin 2\alpha$, iar în ΔBCE putem scrie: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$, (1)

de unde: $\dfrac{a}{b} = 3 - 4 \sin^2\alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha$,

deci: $\cos 2\alpha = \dfrac{a - b}{2b}$. (2)

Aplicînd formula $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$, deducem:

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{(a + b)(3b - a)}}{2b}. \quad (3)$$

Înlocuind în relaţia (1) obţinem:

$x = \dfrac{a}{2b}\sqrt{(a + b)(3b - a)}$, evident, cu condiţia $a < 3b$.

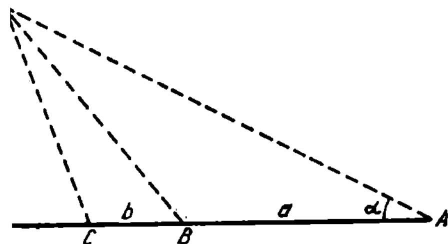


Fig. VII, 13

b) Împărţind relaţiile (2) şi (3) avem: $\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{\sqrt{(a + b)(3b - a)}}{a - b}$. (4)

Dar făcînd $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ în relaţia: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, obţinem: $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$.

Înlocuind în (4) şi ridicînd la pătrat avem: $\frac{9}{16} = \frac{(a+b)(3b-a)}{(a-b)^2}$, de unde: $39b^2 + 50\,ab - 25\,a^2 = 0$

sau: $(13b - 5a)(3b + 5a) = 0$.

Dar relaţia: $3b + 5a = 0$ este imposibilă; rezultă: $13b - 5a = 0$; deci: $5a = 13b$.

12. ***Pe un teren orizontal se găsesc un stîlp şi un turn la o distanţă a unul de celălalt. Ştiind că de la piciorul turnului stîlpul se vede sub un unghi α, de la piciorul stîlpului turnul se vede sub un unghi de 2α şi că, de la mijlocul distanţei a, unghiurile sub care se văd cele două obiective sînt complementare, să se găsească înălţimea stîlpului şi a turnului*** (fig. VII, 14).

Soluţie. În $\Delta\,ABM$ avem: $x = a \operatorname{tg} \alpha$, (1)

iar în ΔABN avem $y = a \operatorname{tg} 2\alpha$. (2)

Observăm că: $\Delta\,AMP \sim \Delta\,BNP$,

deci: $xy = \frac{a^2}{4}$. (3)

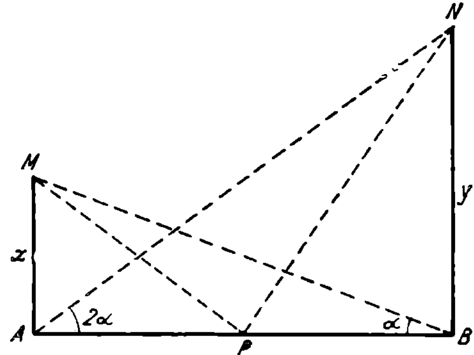


Fig. VII, 14.

Înlocuind relaţiile (1) şi (2) în (3) obţinem:

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a^2}{4} \text{ sau } 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = 1. \quad (4)$$

Rezolvînd ecuaţia (4) avem: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ şi $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$, deci: $x = \frac{a}{3}$ şi $y = \frac{3a}{4}$.

13. *La săparea unui tunel drept, cunoscîndu-se într-o parte a dealului direcţia liniei ferate, să se afle continuarea acestei direcţii dincolo de deal. Cu alte cuvinte, se cere să se prelungească o dreaptă dincolo de un obstacol care opreşte vederea* (fig. VII, 15).

Soluţie. Fie $AB = c$ o distanţă cunoscută (se poate măsura). Ne propunem să prelungim direcţia AB dincolo de obstacolul M. Alegem în teren un punct C, de unde se pot vedea punctele A şi B, precum şi locul unde se va prelungi direcţia AB.

Putem deci măsura $\hat{A}$ şi $\hat{B}$:

În $\Delta\ ABC$ avem:

$$BC = a = \frac{c \sin A}{\sin[180° - (A + B)]}. \quad (1)$$

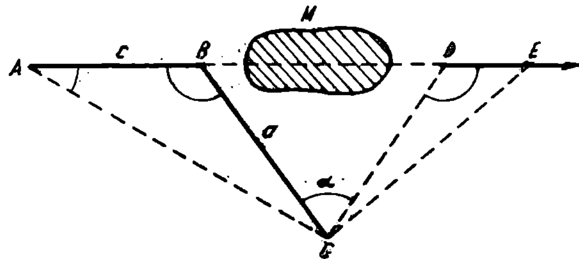


Fig. VII, 15.

Spre locul în care vrem să prelungim dreapta AB, considerăm o direcţie convenabilă CD şi măsurăm unghiul $\widehat{BCD} = \alpha$.

În ΔBDC cunoaştem $BC = a$, din relaţia (1) unghiul $\widehat{DBC} = 180° - B$, şi unghiul α.

Avem: $B = \alpha + \widehat{BDC}$, deci $\widehat{BDC} = B - \alpha$; rezultă: $\widehat{CDE} = 180° - (B - \alpha)$.

De asemenea, avem: $\frac{CD}{\sin \widehat{DBC}} = \frac{a}{\sin \widehat{BDC}}$ sau $\frac{CD}{\sin(180° - B)} = \frac{a}{\sin(B - \alpha)}$,

de unde: $CD = \dfrac{a \sin B}{\sin (B - \alpha)}$.

În sfîrşit, înlocuind pe a cu valoarea sa din (1) avem: $CD = \dfrac{c \sin A \sin B}{\sin (B - \alpha) \sin [180° - (A + B)]}$. (2)

Rezultă că pe direcţiea CD găsim punctul D astfel ca CD să fie egal cu valoarea aflată (relaţia (2)). În punctul C ducem dreapta DE care face cu direcţia DC unghiul $\widehat{CDE} = 180° - (B - \alpha)$. Evident că direcţia căutată, adică prelungirea dreptei AB, este DE.

Exerciţii.

1° Se dă: $c = 1{,}5$ km, $A = 47°25'$, $B = 102°52'$ şi $\alpha = 51°30'$ (fig. VII, 15). Se găseşte: $CD = 2{,}780$ km şi $\widehat{CDE} = 128°38'$. 2° Se dau: $c = 87{,}34$ m, $A = 50°13'25''$, $B = 107°38'09''$, $\widehat{ACD} = 61°20'33''$ (fig. VII, 15). Se găseşte: $CD = 182{,}284$ m, $\widehat{CDE} = 111°42'58''$.

14. *Cunoscînd trei puncte pe teren A, B, C se cere să se găsească poziţia unui al patrulea punct M, din care se văd segmentele AB şi BC sub unghiurile α şi β* (fig. VII, 16). *Problema este cunoscută sub numele de „Problema hărţii".*

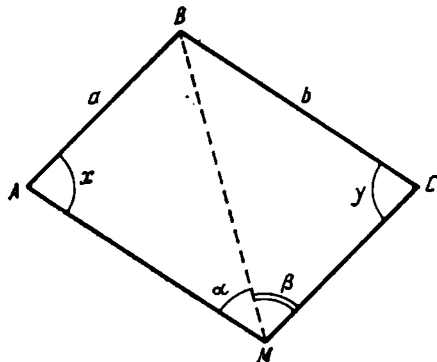


Fig. VII, 16.

Soluţie. Evident, geometric, poziţia punctului M este dată de intersecţia arcelor cercurilor descrise pe AB şi BC capabile de unghiurile α şi β. Problema este nedeterminată dacă punctul M aparţine cercului circumscris ΔABC.

Vom considera ca necunoscute unghiurile $\widehat{MAB} = x$ şi $\widehat{MCB} = y$.

Avem: $x + y + \alpha + \beta + B = 360°$, deci: $x + y = 360° - \alpha - \beta - B$. (1) (2)

Fiind necesară diferenţa $x - y$, măsurăm distanţele $AB = a$, $BC = b$, precum şi unghiul $\widehat{ABC} = B$. În Δ ABM şi în Δ BCM, avem: $BM = \dfrac{a \sin x}{\sin \alpha}$ şi $BM = \dfrac{b \sin y}{\sin \beta}$, de unde: $\dfrac{\sin x}{\sin y} = \dfrac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}$.

Notăm: $\dfrac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi$. (3)

Unghiul φ se poate calcula uşor, toate elementele din relaţia (3) fiind cunoscute. Avem

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ deci } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}, \text{ de unde: } \frac{2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}}{2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}} = \operatorname{tg} (\varphi - 45°)$$

$$\text{sau: } \operatorname{tg} \frac{x - y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{tg} (\varphi - 45°). \quad (4)$$

Dar din (2) avem: $\dfrac{x + y}{2} = 180° - \dfrac{\alpha + \beta + B}{2}$, deci: $\operatorname{tg} \dfrac{x + y}{2} = - \operatorname{tg} \dfrac{\alpha + \beta + B}{2}$. (5)

Introducînd în (4) obţinem: $\operatorname{tg} \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{\operatorname{tg}(45° - \varphi)}{\operatorname{ctg} \dfrac{\alpha + \beta + B}{2}}$. (6)

Din relaţiile (2) şi (6) putem calcula pe x şi y. Deci construind dreptele AM şi CM, găsim punctul M rezultat din intersecţia lor.

Observaţii. Problema este nedeterminată dacă relaţia (6) este de forma: $\operatorname{tg} \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{0}{0}$,

adică, dacă: $\operatorname{tg}(45° - \varphi) = 0$ şi $\operatorname{ctg}\frac{\alpha + \beta + B}{2} = 0$, relaţii care pot avea loc dacă: $\varphi = 45°$ şi $\alpha + \beta + B = 180°$. Dar, dacă $\varphi = 45°$, din relaţia (3) obţinem: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$.

De asemenea, din relaţia $\alpha + \beta + B = 180°$ reiese că unghiurile B şi M sînt suplementare, adică patrulaterul $ABCM$ este inscriptibil.

Rezultă că problema este nedeterminată atunci cînd $\alpha + \beta = 180° - B$.

Exerciţii.

1° Se dă: $a = 725$ m, $b = 529$ m, $\alpha = 43°24'$, $\beta = 39°47'$, $B = 132°35'$ (fig. VII, 16).

Se găseşte: $\varphi = 51°55'17''$, $x = 51°30'$, $y = 92°44'$, $MA = 1050,30$ m, $MB = 825,80$ m, $MC = 609,07$ m. 2° Se dă: $a = 170$ m, $b = 200$ m, $\alpha = 30°09'$, $\beta = 46°17'13''$, $B = 114°40'08''$ (fig. 16)

Se găseşte: $\varphi = 39°15'57''$, $x = 38°31'14''$, $y = 130°22'24''$, $BM = 210,80$ m.

15. *Să se calculeze raza unui turn cilindric* (fig. VII, 17).

Soluţie. Considerăm o bază $AB = d$ şi unghiurile făcute de extremităţile ei cu razele vizuale tangente la turn.

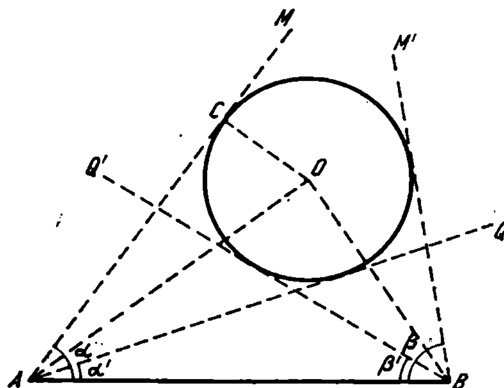


Fig. VII, 17.

Notăm: $OC = R$ (raza turnului), $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{QAB} = \alpha'$, $\widehat{M'BA} = \beta$ şi $\widehat{Q'BA} = \beta'$.

Observăm că: $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \alpha$ şi $\widehat{OAB} - \widehat{OAC} = \alpha'$. Deci: $\widehat{OAB} = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$ şi $\widehat{OAC} = \frac{\alpha - \alpha'}{2}$; analog $\widehat{OBA} = \frac{\beta + \beta'}{2}$ şi $\widehat{OBR} = \frac{\beta - \beta'}{2}$.

În $\Delta\, AOB$ avem: $AO = \dfrac{d \sin\frac{\beta + \beta'}{2}}{\sin\frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}$. În $\Delta\, OCA$ avem: $R = AO \sin\frac{\alpha - \alpha'}{2}$;

$$\text{rezultă: } R = \frac{d \sin\frac{\alpha - \alpha'}{2} \sin\frac{\beta + \beta'}{2}}{\sin\frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}.$$

Observaţie. Calculînd pe $BO = \dfrac{R}{\sin\frac{\beta - \beta'}{2}}$ am fi găsit: $R = \dfrac{d \sin\frac{\beta - \beta'}{2} \sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}$.

Comparînd valorile găsite pentru R, găsim condiţia de posibilitate a problemei:

$$\frac{\sin\frac{\alpha - \alpha'}{2}}{\sin\frac{\alpha + \alpha'}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta - \beta'}{2}}{\sin\frac{\beta + \beta'}{2}} \text{ sau } \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha'}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta'}{2}}.$$

Probleme propuse

1. Unghiul vertical măsurat la vîrful unui turn este de 42°24′13″, iar distanţa pînă la baza turnului este de 48,25 m. Care este înălţimea turnului, ştiind că ochiul observatorului este la 1,20 m deasupra orizontului?
2. Să se calculeze înălţimea unui turn vertical care dă o umbră de 32 m, razele solare căzînd sub un unghi de 45°12′30″.
3. Sub ce unghi vede un observator vîrful unui turn înalt de 35,20 m, ştiind că el se află la 49 m de la piciorul turnului şi că înălţimea ochiului observatorului este de 1,40 m?
4. Sub ce unghi (cu orizontala) ne vin razele soarelui în momentul cînd umbra pe care o face un copac este de două ori şi jumătate cît înălţimea lui?
5. Se măsoară un unghi vertical de 42°53′ la vîrful unui deal; înaintînd 65 m către deal se mai măsoară un unghi vertical de 68°17′. Care este înălţimea dealului? (Terenul de la poalele dealului este orizontal şi ochiul observatorului se află la o înălţime de 1,72 m).
6. Unghiurile verticale măsurate la un turn din două puncte A şi B situate pe dreapta orizontală care trece prin piciorul turnului sînt de 7°, respectiv 9°25′. Să se calculeze înălţimea turnului deasupra planului orizontal al punctelor A şi B, ştiind că $AB = 135{,}21$ m.
7. Să se calculeze înălţimea unui turn inaccesibil, ştiind că s-a măsurat o bază orizontală $AB = 64$ m, care trece prin piciorul turnului, iar unghiurile făcute de această bază cu razele vizuale plecînd din extremităţile ei la vîrful turnului, sînt respectiv 120°01′30″ şi 35°05′10″. Înălţimea ochiului observatorului este de 1,60 m.
8. Să se calculeze distanţa de la un punct A la un punct inaccesibil C. Pe o perpendiculară în punctul A pe AC se alege un punct B, din care se văd punctele A şi C. Se măsoară unghiul orizontal $\widehat{ABC} = 48°25'$ şi distanţa $AB = 80$ m.
9. Să se calculeze distanţa de la un punct B la un punct inaccesibil A. Pe o dreaptă care trece prin B se alege un punct convenabil C, din care se văd punctele A şi B. Se măsoară unghiurile orizontale $\widehat{ABC} = 98°46'10''$ şi $\widehat{BCA} = 56°28'50''$, precum şi distanţa $BC = 562{,}50$ m.
10. Din două puncte situate la o distanţă de 1 875 m se măsoară simultan, la un punct caracteristic al unui nor, două unghiuri verticale de 75° şi 82°. Să se calculeze înălţimea norului, ştiind că punctele de observare au acelaşi orizont şi că ele împreună cu norul sînt situate într-un plan vertical.
11. Doi observatori depărtaţi unul de altul la 1 200 m, observă în acelaşi timp un balon situat în planul lor vertical. Unghiurile verticale luate de ei simultan sînt respectiv de 63°23′ şi 72°14′. Care este înălţimea balonului, ştiind că înălţimea instrumentelor este de 1,55 m?
12. Să se afle lungimea unei păduri, cunoscînd distanţele de la doi pomi (A şi B) din margine, la un punct (C) fixat în cîmp, cunoscînd $BC = a = 1565$ m, $AC = b = 1\,483$ m şi unghiul orizontal $\widehat{ACB} = 116°23'$.

13. Două imobile A şi B sînt despărţite printr-un parc. Ambele imobile sînt vizibile dintr-un punct C, situat la 120 m de A şi 140 m de B. Ştiind că unghiul orizontal $\widehat{ACB} = 68°36'$, să se afle distanţa dintre cele două imobile.

14. Două localităţi A şi B, vizibile dintr-un punct C, sînt despărţite printr-un lac. Să se afle distanţa dintre ele, ştiind că $AC = 2{,}8$ km, $BC = 1{,}7$ km şi unghiul orizontal $\widehat{ACB} = 61°55'39''$.

15. Să se calculeze distanţa dintre două puncte vizibile A şi B, dar inaccesibile, cunoscînd baza $CD = 1\,432{,}16$ m şi unghiurile orizontale $\widehat{ACD} = 79°15'28''$, $\widehat{ADC} = 35°51'12''$, $\widehat{BCD} = 46°25'57''$ şi $\widehat{BDC} = 64°36'06''$.

16. Să se calculeze distanţa dintre două puncte vizibile A şi B, dar inaccesibile, cunoscînd baza $CD = 304{,}10$ m şi unghiurile orizontale $\widehat{ADC} = 28°30'$, $\widehat{BDC} = 97°45'$, $\widehat{BCD} = 60°$ şi $\widehat{ACD} = 137°$.

17. Să se afle distanţa dintre două blocuri turn, A şi B, vizibile din două puncte C şi D, situate pe aceeaşi stradă. Sînt cunoscute distanţa $CD = 120$ m, precum şi unghiurile orizontale $\widehat{ACD} = 72°14'$. $\widehat{ADC} = 36°49'$, $\widehat{CDB} = 68°16'$ şi $\widehat{BCD} = 41°40'$.

18. Un avion zburînd la aceeaşi înălţime, păstrînd drumul şi viteza constante, măsoară în două momente unghiurile făcute de direcţia de zbor, cu direcţiile la un obiectiv terestru. Ştiind că distanţa parcursă de avion între cele două observaţii era de 1 800 m şi că unghiurile luate au fost de 37°14′ şi 51°30′, se cere să se calculeze distanţa (d) dintre obiectiv şi poziţia avionului în momentul primei observaţii.

19. Să se găsească înălţimea unui deal MN, ştiind că s-a măsurat o bază orizontală $AB = 88$ m; unghiurile razelor vizuale din A şi B la vîrful dealului cu AB sînt respectiv 48°20′32″ şi 63°00′06″. Unghiul făcut de MA cu verticala punctului A este de 33°10′, iar înălţimea instrumentului 1,50 m.

20. Să se calculeze raza Pămîntului, ştiind că un observator ridicat la o înălţime de 17,64 m a găsit că raza vizuală tangentă la suprafaţa mării face cu orizontala un unghi de 8′.

21. Pentru măsurarea înălţimii unei statui AB, aşezată pe un soclu inaccesibil AC, s-a măsurat o bază orizontală $PR = 14$ m, situată în acelaşi plan cu AB şi unghiurile $\widehat{APC} = 22°$, $\widehat{BPC} = 32°$, $\widehat{BRP} = 20°$. Ce înălţime are statuia?

22. Un paratrăsnet $AB = 8{,}264$ m este aşezat pe o clădire a cărei înălţime este AC. Dintr-un punct P aşezat la o depărtare de 82,656 m de piciorul clădirii şi la o înălţime de 1,621 m deasupra terenului, paratrăsnetul se vede sub un unghi de 4°27′54″. Să se calculeze înălţimea clădirii.

23. Un turn AN şi un copac BM se găsesc pe o cîmpie orizontală, la o distanţă $MN = 24$ m. De la piciorul turnului, copacul se vede sub un unghi vertical α.

De la piciorul copacului, turnul se vede sub un unghi vertical 2α. Privind din mijlocul distanței MN, copacul și turnul se văd sub unghiuri verticale complementare. Se cere înălțimea copacului și a turnului.

24. Cunoscîndu-se trei puncte A, B, C de pe o hartă, se cere să se găsească un punct M interior triunghiului ABC, știind că $AB = 354$ m, $BC = 288$ m, $\widehat{ABC} = 136°39'54''$, $\widehat{AMB} = 68°05'12''$ și $\widehat{BMC} = 53°44'04''$.

25. O persoană mergînd pe un drum în linie dreaptă observă că cel mai mare unghi sub care se văd două puncte date este α; din acest moment el mai face un drum a, pînă cînd cele două puncte se confundă și găsește că această direcție face unghiul β cu drumul. Se cere distanța dintre cele două puncte.

Indicații și răspunsuri

Capitolul 1

1. 0,01745; 0,00029; 0,00145; 0,94248; 0,000145; 0,24799.
2. 27°41′32″, 30^g 7691; 75°, 83^g33; 252°, 280^g.
3. 57°17′44,4″.
4. $\frac{3,14159}{648\ 000}$ rad.
5. 75°34′10,8″; 0,419831 π rad.
6. 131°00′38,4″.
7. 150^g7953; 0,754 π rad.
8. 0,3184 rad.
9. 42°17′13,7″; 47^g066.
10. 128°34′17″.
11. −22°30′; 42°.
12. 117°; −81°49′54″; 107°01′37″.
13. $\frac{17\pi}{36}$.
14. $\frac{4\pi}{5}$; 160^g.
15. Se transformă în radiani; se obține $\frac{7}{4}$.
16. 23°30′; 46°26′.
17. 36°45′, 14°15′; −0°48′45″, 21°41′15″.
18. 0,42 rad.
19. 6,53 m.
20. 71°39′.
21. 0,4683 rad, 26°50′42″.
22. 3,05 cm; 3,94 dm; 0,495 m.
23. 4,796 m.
24. 10,97 m.
25. 1,67 cm.
26. 87°46′; 65°49′30″.
27. 3,75 rad; 214°51′52″.
28. $\omega \approx 0,000072$ rad/s.
29. 200.
30. $\frac{4\pi}{15}$ rad/s.
31. 9 s.
32. $\frac{32\pi}{3}$ rad/s.
33. *a)* 720°; 4π; *b)* 840°; $\frac{16\pi}{3}$; *c)* 225°; $\frac{5\pi}{4}$.
34. 10π rad/s; 37,68 m/s.
35. $\frac{\pi}{21\ 600}$ rad/s; $\frac{\pi}{1\ 800}$ rad/s; $\frac{\pi}{30}$ rad/s.
36. $\frac{7\pi}{18}$ rad; 50°; 55^g555.
37. 3 min; 27 min; $3(4n-3)$ min.
38. arc AN = 144°44′27″; arc AP = 215°15′33″; arc AR = 324°44′27″.

Capitolul 2

1. *a)* tg 10° sin 10°; *b)*, *c)* 1 $\left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right)$.

3. *a)* $T = \frac{\pi}{3}$; *b)* $T = \pi$; *c)* neperiodică; *d)* $T = 2\pi$; *e)* neperiodică.

4. *a)* $\frac{\pi}{2}$; *b)* $\frac{2\pi}{3}$ · *c)* π. *Ind. a)* $\sin^2 2x + \text{ctg}\, 2x = \frac{1-\cos 4x}{4} + \text{ctg}\, 2x$; *b)* Se ține seama de

identitatea $\sin 6x \cos 15x = \frac{1}{2}(\sin 21x - \sin 9x)$, apoi se determină cele mai mici numere care satisfac relaţia $\frac{m2\pi}{21} = \frac{n2\pi}{9}$.

5. 2π. *Ind.* $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, & \text{dacă } x \neq k\pi \\ 0, & \text{dacă } x = k\pi, \end{cases}$

iar funcţiile $\sin^2 nx$ şi $\sin x$ admit respectiv perioadele $\frac{\pi}{n}$, 2π.

6. $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$. *Ind.* Se ia $x = 0$ în identitatea $\cos n(x + 3\pi) \cdot \sin \frac{5}{n}(x + 3\pi) = \cos nx \sin \frac{5}{n} x$.

7. *Ind.* Luînd în identitatea $\cos\sqrt{x + T} = \cos\sqrt{x}$, $x = 0$ şi $x = T$ se obţine egalitatea $\sqrt{2} = \frac{l}{k}$ (l, k — întregi).

8. *a)* pară; *b)* pară; *c)* impară; *d)* pară; *e)* nici pară, nici impară.

9. *Ind.* Se scrie suma sub forma $(a_1 \cos\alpha_1 + \ldots + a_n \cos\alpha_n)\cos x - (a_1 \sin\alpha_1 + \ldots + a_n \sin\alpha_n)\sin x$ şi se arată că sumele din paranteze sînt nule.

10. *a)* $\frac{9\pi}{14}$; *b)* $-\frac{\pi}{10}$.

12. $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$. *Ind.* $S_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $S_2 = \operatorname{arctg}\frac{2}{3}$, $S_3 = \operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. Demonstraţia se face prin inducţie completă.

13. $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \frac{\pi}{2}$. *Ind.* $\cos\arcsin x = \sin\arccos x = +\sqrt{1 - x^2}$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

14. *Ind.* Realizantul ecuaţiei $12\pi t^2 - 6\pi^2 t + (1 - 8\alpha)\pi^3 = 0$ ($t = \arcsin x$) este negativ.

15. *a)* $f(x) \in \left[\frac{1}{2}\sin 4, \frac{1}{2}\sin 2\right]$; *b)* $f(x) \in \left[-1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$. *Ind.* *a)* Funcţia este strict descrescătoare; *b)* Funcţia este pară şi strict monotonă.

16. *Ind.* $y = y_1 + y_2 = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ (fig. II, 13).

17. *Ind.* $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 2\alpha)$ (fig. II, 14).

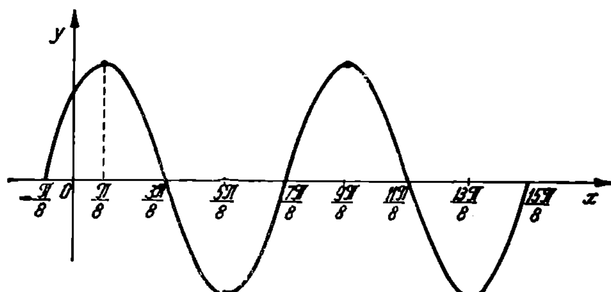


Fig. II, 13

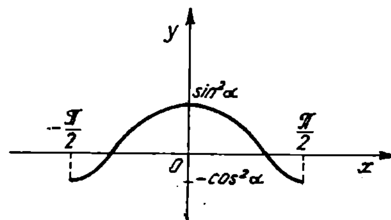


Fig. II, 14

19. *Ind.* $f(x) = \begin{cases} k2\pi, \text{ dacă } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right], \\ 2x - (2k+1)\pi, \text{ dacă } x \in \left[\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right] \end{cases}$ (fig. II, 16)

20. *a)* $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$; *b)* $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$. *Ind.* *a)* $\sin x > 0$ şi $\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$.

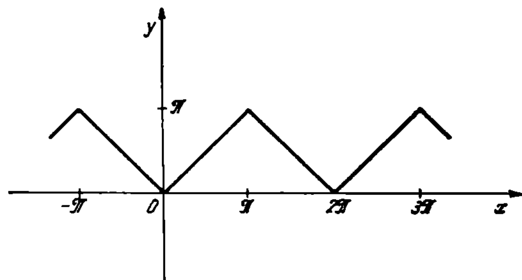
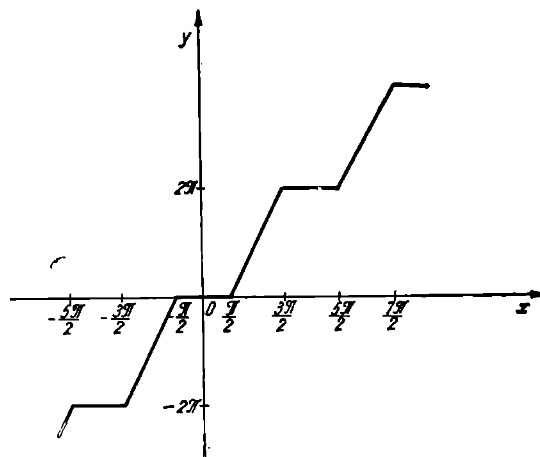


Fig. II, 15



F . II, 16

21. *Ind.* $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 - \frac{2\cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$.

22. $\min U = 2a\sqrt{1-a}$ şi se obţine pentru $\cos(x+y) = \cos(x-y) = \sqrt{1-a}$; $\max U = a(2-a)$ şi se obţine pentru $\cos x = \cos y = \sqrt{\frac{2-a}{2}}$.

Ind. $U = 2a\cos x\cos y = a[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$, unde $\cos(x+y) > 0$, $\cos(x-y) > 0$ şi $\cos(x+y)\cos(x-y) = 1 - a$; $U^2 = 4a^2\cos^2 x\cos^2 y$ şi $\cos^2 x + \cos^2 y = 2 - a$.

23. Triunghiul isoscel. *Ind.* Dacă $a = BC$ este baza triunghiului, atunci

$$b + c = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}}\cos\frac{B-C}{2}$$ (fig. II, 17).

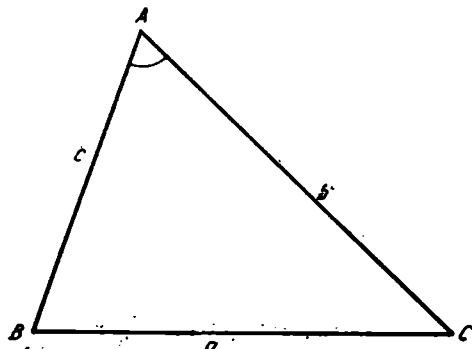


Fig. II, 17

24. Triunghiul dreptunghic isoscel. *Ind.* $S = \frac{2R^2}{\sin 2\alpha}$ (fig. II, 18).

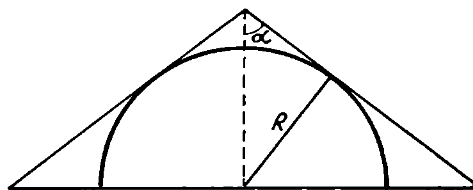


Fig. II, 18

25. $x = \frac{\alpha}{2}$. *Ind.* $S = \frac{R^2}{\sin\alpha}[\cos(2x - \alpha) - \cos\alpha]$ (fig. II, 19).

26. M este mijlocul arcului $\overparen{AB}$; M coincide cu extremitățile arcului $\overparen{AB}$.
Ind. $S = \frac{R^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$ (fig. II, 20).

27. $a(1 + \sqrt{2})$. *Ind.* $2p = a\left[1 + \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

28. $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ dacă cercurile sînt tangente exterioare; $x = \frac{\alpha}{2}$ dacă cercurile sînt tangente in-

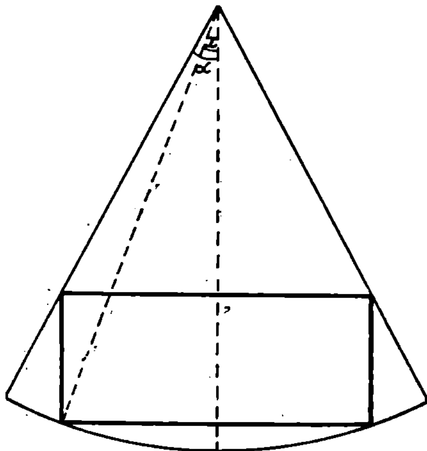


Fig. II, 19

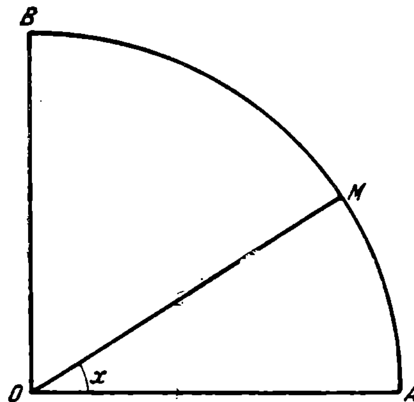
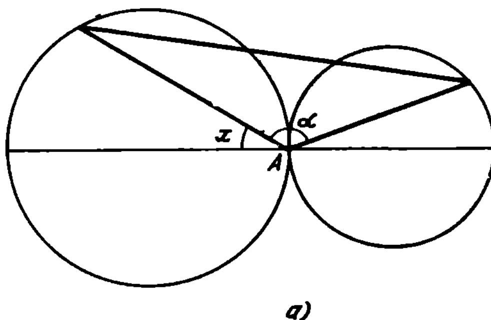


Fig. II, 20

terioare. *Ind.* $S = 2Rr\ [\cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi - \alpha - 2x)]$ și $S = 2Rr\ [\cos\alpha + \cos(\alpha - 2x)]$ (fig. II, 21).

29. $2R^2 - d^2$. *Ind.* $S = 2\sqrt{(R^2 - d^2\sin^2 x)(R^2 - d^2\cos^2 x)}$ și suma factorilor de sub radical este constantă (fig. II, 22).

30. $x = \sqrt{ab}$. *Ind.* $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}$ (fig. II, 23).



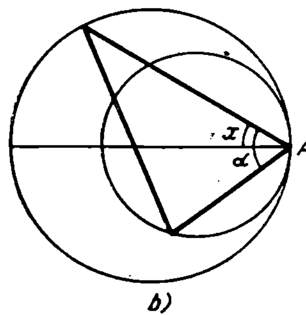


Fig. II, 21

31. $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Ind.* $S = 2\pi\,(x^2 + 2xy) = 2\pi R^2 \cos\,(2\alpha - \varphi)$, unde $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ (fig. II, 24).

32. Triunghiul dreptunghic isoscel. *Ind.* $V = \frac{4}{3}\pi a^3 \sin^2 2\alpha$, α fiind unul dintre unghiurile ascuțite ale triunghiului.

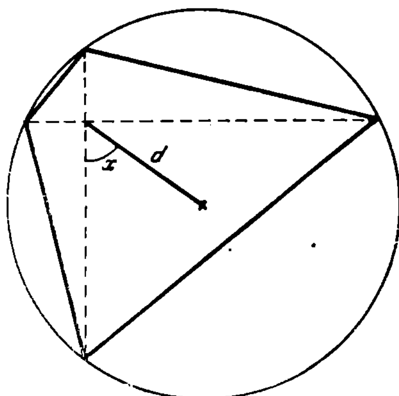


Fig. II, 22

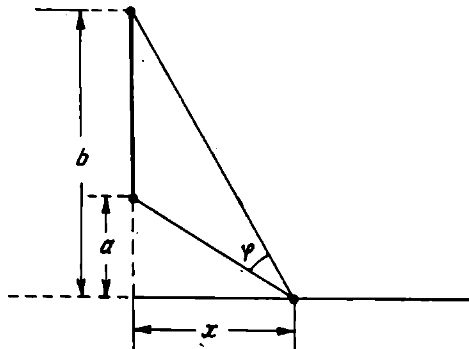
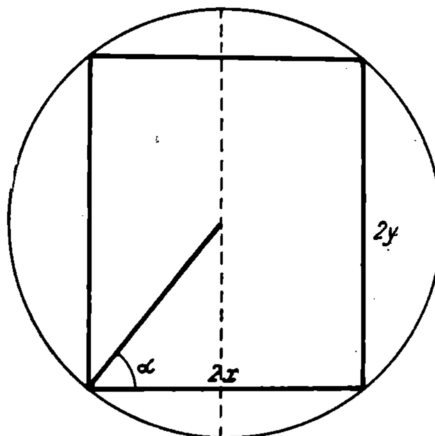


Fig. II, 23

33. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$. *Ind.* $V = \frac{4}{3}\pi a^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$, α fiind semiunghiul de la vîrful triunghiului.

34. $x = \arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$. *Ind.* $S = 4\pi R^2 \sin^2 x \cos x$.

Fig. II, 24



Capitolul 3

A. *Aplicații ale formulelor* 1—4

1. $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$.

2. $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{91}}{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = \mp\frac{3\sqrt{91}}{91}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \mp\frac{\sqrt{91}}{3}$.

3. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{6}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{5\sqrt{11}}{11}$.

4. $\sin\alpha = \pm\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \mp\frac{4}{3}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \mp\frac{3}{4}$.

5. $\sin\alpha = \pm\frac{7\sqrt{113}}{113}$; $\cos\alpha = \pm\frac{8\sqrt{113}}{113}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{8}{7}$.

6. $\sin\alpha = \pm\frac{9}{41}$; $\cos\alpha = \pm\frac{40}{41}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{40}{9}$.

7. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}$; $\cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{42}}{7}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

8. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\alpha = \pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{3}$.

9. $\sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$; $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{8}$.

10. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

11. $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2} - 1$.

12. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

13. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

14. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

15. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}$; $\sec\alpha = \sqrt{6}$.

17. $1 + \cos\alpha$.

18. $2\operatorname{ctg}\alpha$.

19. *a)* $\operatorname{ctg}^2\alpha$; *b)* $\operatorname{tg}^2\alpha$.

20. 1.

21. $\sec^2\alpha$.

22. $\sin\alpha\cos\alpha$.

23. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

24. $\operatorname{ctg}^6\alpha$.

25. *a)* $\operatorname{cosec}^2\alpha$; *b)* $\sin\alpha\cos\alpha$.

26. *a)* $2\,|\operatorname{cosec}\alpha\,|$; *b)* $4\operatorname{tg}^2\alpha$.

31. Se lucrează în membrul stîng, înlocuindu-se tangenta și cotangenta în funcție de sinus și cosinus.

37. b) Se aplică relația:
$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha)$.

41. Ridicăm relația $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ la diferite puteri. Se obține 1.

43. $E = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + 2$. Se înlocuiește 1 cu $(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2$ sau $\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$ și $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha$.

44. $E(\alpha) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha\,|\sin\alpha\,|} - 1\right)$,

deci:

$$E(\alpha) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right) = \sqrt{2}\operatorname{ctg}^2\alpha \text{ pentru } \alpha \in \left(2k\pi,\ (2k+1)\pi\right) \text{ și } E(\alpha) =$$
$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sin^2\alpha} + 1\right) = -\sqrt{2}(\operatorname{ctg}^2\alpha + 2) \text{ pentru } \alpha \in \left((2k+1)\pi,\ 2k\pi\right).$$

45. Punem expresia dată sub forma: $E = (m\operatorname{tg}\alpha - n)\cos\alpha$.
Se calculează $\cos\alpha$ și făcînd înlocuirile obținem $E = \pm n$.

B. *Aplicații ale formulelor* 5—16

46. $-0{,}996$; $0{,}829$; $-0{,}087$; $0{,}558$.

47. $0{,}097$; $-1{,}306$.

48. $2 + \sqrt{3}$.

49. $\frac{1}{10}\left(3 + 4\sqrt{3}\right)$; $\frac{1}{10}\left(3\sqrt{3} - 4\right)$.

50. $\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}$.

51. $\frac{1 - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\beta}$.

52. $\frac{4\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

53. $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

54. $-2\sqrt{3}$.

55. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

56. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

57. $2-\sqrt{3}$.

58. $2+\sqrt{3}$.

59. -1.

62. *b)* Se observă că $\alpha = (\alpha - \beta) + \beta$.

C. *Aplicații ale formulelor* 17—34

81. 0,96; 0,28; $\frac{24}{7}$.

82. $\sqrt{5}-2$.

83. 0,792.

84. 0,568.

85. 0,9952; 0,1788.

86. $\frac{1}{2}$; -3.

87. $\frac{3}{\sqrt{10}}$; $-\frac{1}{\sqrt{10}}$; -3.

89. $\frac{70}{161}$, $\frac{7}{24}$.

90. $\pm\frac{21}{29}$; $\pm\frac{20}{29}$.

91. Se va proceda ca în problema rezolvată nr. 37.

92. $4\sin\alpha\cos^3\alpha - 4\sin^3\alpha\cos\alpha$; $5\sin\alpha - 20\sin^3\alpha + 16\sin^5\alpha$; $32\sin\alpha\cos^5\alpha - 32\sin\alpha\cos^3\alpha + 6\sin\alpha\cos\alpha$.

93. $4\sin^4\alpha + 4\cos^4\alpha - 3$; $16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha$.

94. Aplicîndu-se formulele (17), (18), (25), (26) se găsește:

$\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

95. Aplicîndu-se formulele (17), (27′) și (22) se găsește:

$2m\sqrt{1-m^2}$; $\frac{m}{1+\sqrt{1-m^2}}$; $(1-4m^2)\sqrt{1-m^2}$.

96. Aplicîndu-se formulele (29), (30), (31) se găsește:

$\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

97. Se aplică formulele $\sin 2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$ și formula (19); se găsește:

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; -1.

98. $\sin^3\alpha = \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{1}{4}\sin 3\alpha$ și $\sin^4\alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha$.

99. *a)* $\frac{1}{8}\sin 8\alpha$; *b)* $\sec\alpha$; *c)* notăm $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = t$, deci $\sin\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$ și $\cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Înlocuind, se obține: $E_3 = \frac{1}{4}\sec^4\frac{\alpha}{2}$.

104. Lucrăm în membrul drept: $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \ldots$ ș.a.m.d.

105. Scriem membrul stîng sub forma: $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} = \ldots$ aplicăm formulele (21) și (22) și efectuăm calculele.

106. Înlocuim în membrul drept: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$, $1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ și efectuăm calculele.

120. Eliminăm numitorii. Deci: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \sin 2\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$ ... ş.a.m.d.

Se obţine $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha$.

121. Se lucrează în membrul drept aplicînd formulele: $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ şi $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

122. Se lucrează în membrul stîng aplicîndu-se formula (23).

D. *Aplicaţii ale formulelor* 35—63

127. $\sqrt{1{,}5}$; $\sin 18°$; 0; $-\sin 18°$.

128. $2\cos 30°\cos 15°$; $\frac{\sin 56°}{\cos 21°\cos 35°}$; $\sqrt{2}\frac{\cos 2°52'}{\cos 42°08'}$.

129. $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; $\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$; $\frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha}$; $\frac{\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\alpha}$.

130. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2}\right)$; $2\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$; se notează $a \operatorname{tg}\varphi = b \operatorname{tg}^2\alpha$, se obţine: $\frac{a\cos^2\alpha\cos(\alpha - \varphi)}{\cos\varphi}$.

131. $\sqrt{8}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; $-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$; $\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{\sqrt{8}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos\alpha}$;

Se scrie: $\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)}{\cos\alpha}$ şi se obţine: $\frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

132. $\cos\alpha$; $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$.

133. $\frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$; $-\frac{\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta)}{\cos^2\alpha\sin^2\beta}$.

134. $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)$; $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

135. $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$; $4\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\beta + \gamma}{2}\sin\frac{\gamma + \alpha}{2}$; $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ (v. aplicaţia nr. 63).

136. $2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$; $2\operatorname{tg}\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

137. $\frac{1}{4}\sec^2\alpha$.

138. $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha - \beta}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}$;

$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha + \beta}{2}\right)$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$.

139. Se face notaţia $\frac{m \sin\alpha}{n \cos\beta} = \text{tg}\,\varphi$ şi se obţine: $\frac{\sin\alpha \sin(\varphi - \beta)}{\cos\beta \sin(\varphi - \alpha)}$.

140. Se împart termenii fracţiei cu b şi se notează $\text{tg}\,\varphi = \frac{a}{b}$; se obţine:

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\pi+\alpha}{2}\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

141. Vezi aplicaţia nr. 65; se obţine: $\frac{\cos\left[\alpha + \frac{(n-1)h}{2}\right]\sin\frac{nh}{2}}{\sin\frac{h}{2}}$; $\frac{\cos 2\alpha \sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ sau

$4\cos 2\alpha \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$.

142. $2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{12}$; se scrie: $2\sqrt{\text{tg}\,\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{\cos\alpha}{4}} + \sqrt{1 - \frac{\cos\alpha}{4}}\right)$; se notează $\cos\varphi = \frac{\cos\alpha}{4}$ şi se obţine $4\sqrt{\text{tg}\,\alpha}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$.

143. $-\frac{1}{2}$.

145. *a)* Se aplică formula (47); *b)* Se înmulţesc ambii membri cu $\sin\frac{\pi}{7}$ şi se transformă produsele în diferenţe de sinusuri.

146. Se lucrează în ambii membri, făcînd $\cos 15° = \sin 75°$; $\cos 5° = \sin 85°$ ş.a.m.d. Se obţine în ambii membri $\sqrt{3}$.

148. Se transformă produsele în diferenţe: $\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$ ş.a.m.d.

159. Avem $\text{tg}\,\alpha - \text{ctg}\,\alpha = -2\,\text{ctg}\,2\alpha$; de asemenea, $2\,\text{tg}\,2\alpha - 2\,\text{ctg}\,2\alpha = -4\,\text{ctg}\,4\alpha$ ş.a.m.d.

160. Se elimină numitorul. Se lucrează în membrul stîng, transformîndu-se produsele în diferenţe de sinusuri.

161. Se lucrează în ambii membri: $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha = -2\sin\alpha\cos 4\alpha$ ş.a.m.d. Se obţine în ambii membri $\text{tg}\,\alpha$.

177. $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$.

182. Facem $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$, $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$ ş.a.m.d.

191. $-\frac{2\cos^2\alpha\,\text{tg}\,3\alpha}{\cos 2\alpha}$.

195. $S_1 = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos n\alpha \sin(n+1)\alpha}{2\sin\alpha}$.

199. Avem succesiv: $3 - 2\cos(\alpha + \beta) - 2\sin\alpha - 2\sin\beta \geqslant 0$ sau $1 + 2[1 - \cos(\alpha + \beta)] - 2(\sin\alpha + \sin\beta) \geqslant 0$ ş.a.m.d.

200. Soluţia 1°. Inegalitatea propusă se scrie: $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \leqslant$

$\leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}\right)$ sau, notînd $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$ şi $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=y$, x şi y fiind pozitive subunitare, obţinem: $\dfrac{x+y}{1-xy} \leqslant \dfrac{x}{1-x^2}+\dfrac{y}{1-y^2}$ ş.a.m.d.

Soluţia 2°. Inegalitatea se poate scrie: $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ şi, deoarece $0 \leqslant \sin\frac{\alpha+\beta}{2} < 1$, prin împărţire, relaţia devine: $\dfrac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta} \geqslant \dfrac{1}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$ ş.a.m.d.

Capitolul 4

1. $x=\left\{\frac{\pi}{2}+k2\pi\right\} \cup \{\pi+k2\pi\}$. *Ind.* Funcţia din membrul stîng al ecuaţiei este periodică, cu perioada egală cu lungimea intervalului $[0,2\pi]$.
2. x_2 este rădăcină a ecuaţiei respective. *Ind.* Funcţiile din membrul stîng al ecuaţiilor date sînt periodice, cu perioada 2π şi π respectiv, iar $9\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\cdot 2\pi, 4\pi=\pi+3\pi$.
3. $x=\left\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \{k\pi\}$. *Ind.* Exprimînd $\sin 3x$ prin $\sin x$ se obţine ecuaţia echivalentă $3\sin x\,(1-2\sin^2 x)=0$.
4. $x=\{k\pi\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$.
5. a) $x=k\frac{\pi}{4}$. *Ind.* Grupînd convenabil termenii, ecuaţia se poate scrie sub forma $4\sin 4x\cos 2x\cos x=0$; b) $x=\{k\pi\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\right\}$.
6. $x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$. *Ind.* După transformări, se obţine ecuaţia echivalentă $\operatorname{tg} 2x=-1$.
7. $x=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi\right\}$.
8. $x=\{k\,180°\} \cup \{\pm\operatorname{arctg}\sqrt{11}+k\,180°\}$.

9. $\sin x = 0$, $\cos x = \begin{cases} 1, \text{ dacă } x = k2\pi, \\ -1, \text{ dacă } x = (2k+1)\pi; \end{cases}$

$\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dacă $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$; $\sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, dacă $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$; $\sin x = -\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dacă $x = 3\frac{\pi}{4} + k2\pi$; $-\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, dacă $x = 7\frac{\pi}{4} + k2\pi$.

10. a) $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3}\right\}$; b) $x = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$. *Ind.* Se obţine ecuaţia echivalentă $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 3x$.

11. $x = (-1)^k 2 \arcsin \frac{-1+\sqrt{3}}{2} + k2\pi$. *Ind.* Se rezolvă ecuaţia $\cos x = 2\sin\frac{x}{2}$.

12. a) $x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$; b) $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \{k2\pi\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$. *Ind.* Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $(\cos x + \sin x)\left[\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 0$; c) $x = \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

13. a) $x = \pm\arccos(-1 + \sqrt{2}) + k2\pi$. *Ind.* Ecuaţia se poate scrie sub forma echivalentă $\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$; b) $x = \left\{\pm\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi\right\}$; c) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. *Ind.* Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $7\cos^2 2x - \cos^3 2x = 0$.

14. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. *Ind.* Se rezolvă ecuaţia echivalentă $\cos 2x\,(2\cos^2 x + 1) = 0$.

15. a) $x = \{\pm 60° + k\,180°\} \cup \{\pm 35°15'51'' + k\,180°\}$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. *Ind.* Ecuaţia se poate scrie sub forma echivalentă $\sin^3 2x + 7\sin^2 2x - 8 = 0$, de unde $\sin 2x = 1$.

16. a) $x = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$. *Ind.* Se rezolvă ecuaţia echivalentă $8\cos x(\sin x - \cos x) = 0$; b) $x = k\frac{\pi}{4}$. *Ind.* Ecuaţia se poate scrie sub forma echivalentă $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)\sin^2 x \cos^2 x = 0$.

17. a) $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$. *Ind.* Se obţine ecuaţia echivalentă $24\cos^4 2x - 10\cos^2 2x - 1 = 0$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. *Ind.* Se rezolvă ecuaţia echivalentă $\sin^2 2x = 1$.

18. $x = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$.

19. a) $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{(-1)^k\frac{1}{2}\arcsin 2(-1 + \sqrt{2}) + k\frac{\pi}{2}\right\}$; b) $x = \left\{k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\pm\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right\}$. *Ind.* Se obţine ecuaţia echivalentă $\operatorname{tg} 2x\left(\frac{1}{\cos 4x} - 1\right) = 0$.

20. a) $x = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi\right\}$. *Ind.* Ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\cos x = \sin 2x$ $(\cos x \neq 0)$; b) $x = \left\{\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right\}$. *Ind.* Fiindcă $x \neq k\frac{\pi}{4}$, ecuaţia dată este echivalentă cu ecuaţia $\sin 4x = \frac{1}{2}$.

21. a) $x = \left\{\frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi\right\}$. *Ind.* Fiindcă $x \neq k\frac{\pi}{3}$, se obţine ecuaţia echivalentă $\cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$; b) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. *Ind.* Funcţia din membrul stîng al ecuaţiei nu are sens pentru $x = k\frac{\pi}{2}$; c) Nu are rădăcini.

22. $a = \sqrt{2}$; $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. *Ind.* Se scrie ecuaţia sub forma echivalentă $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$.

23. $x = \pm \arccos \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} + k2\pi$, dacă $m \in [2, +\infty)$; $x = \pm \arccos \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} + k2\pi$, dacă $m \in (-\infty, -2]$. Pentru $m \in (-2,2)$, ecuaţia nu admite rădăcini. *Ind.* Se scrie ecuaţia sub forma echivalentă $\cos^2 x - m\cos x + 1 = 0$.

24. $x = \left\{\pm \arccos\sqrt{\frac{m}{2}} + k2\pi\right\} \cup \left\{\pm \arccos\left(-\sqrt{\frac{m}{2}}\right) + k2\pi\right\} \cup \{k\pi\}$, dacă $m \in (0,2]$ şi $x = k\pi$, dacă $x \in (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$. *Ind.* În ipoteza că $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, ecuaţia dată se poate scri sub forma echivalentă $\sin x\left(\cos^2 x - \frac{m}{2}\right) = 0$.

25. $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pm\sqrt{m^2 + 2}} + k\frac{\pi}{2}$, dacă $m \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$. *Ind.* Se scrie ecuaţia sub forma echivalentă $\sin^2 2x = \frac{4}{m^2 + 2}$ şi se ţine seama de inegalitatea $|\sin\alpha| \leqslant 1$.

26. $x = \pm \arccos \frac{3(m-1) - \sqrt{9m^2 - 10m + 25}}{4} + k2\pi$, dacă $m \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$; $x = \pm \arccos \frac{3(m-1) + \sqrt{9m^2 - 10m + 25}}{4} + k2\pi$, dacă $m \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. Pentru $m \in \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$, ecuaţia nu are soluţii. *Ind.* Vezi problema 42 (rezolvată).

27. $x = \left\{\pm \arccos \frac{2m + 1 - \sqrt{-4m^2 + 5}}{2(2m^2 + m - 1)} + k2\pi\right\} \cup \left\{\pm \arccos \frac{2m + 1 + \sqrt{-4m^2 + 5}}{2(2m^2 + m - 1)} + k2\pi\right\}$ dacă $m \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left[1, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$; $x = \pm \arccos \frac{2m + 1 - \sqrt{-4m^2 + 5}}{2(2m^2 + m - 1)} + k2\pi$, dacă $m \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; $x = \pm \arccos \frac{2m + 1 + \sqrt{-4m^2 + 5}}{2(2m^2 + m - 1)} + k2\pi$, dacă $m \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, dacă $m = \frac{1}{2}$; $x = (2k + 1)\pi$, dacă $m = -1$. *Ind.* Se discută ecuaţia echivalentă $f(t) = (2m^2 + m - 1)t^2 - (2m + 1)t + 1 = 0$, unde $t = \cos x$.

28. $x = \frac{\pi}{4} + (k + l)\pi$, $y = -\frac{\pi}{12} + (k - l)\pi$; $x = -\frac{\pi}{12} + (k + l)\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + (k - l)\pi$; $x = \frac{7\pi}{12} + (k + l)\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + (k - l)\pi$; $x = \frac{\pi}{4} + (k + l)\pi$, $y = \frac{7\pi}{12} + (k - l)\pi$. *Ind.* Se rezolvă sistemul echivalent $\sin(x + y) = \cos(x - y) = \frac{1}{2}$.

29. a) $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi$, $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + l\pi$; b) $x = \left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + k\pi\right\}$; $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

30. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $y = -\frac{5\pi}{12} + l\pi$. *Ind.* Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} y = -(2 + \sqrt{3})$.

31. $x = \frac{\pi}{6} + (4k - l)\frac{\pi}{5}$, $y = \frac{\pi}{6} + (-2k + 3l)\frac{\pi}{5}$; $x = \frac{5\pi}{14} + (-4k + l)\frac{\pi}{7}$, $y = \frac{\pi}{14} + (2k + 3l)\frac{\pi}{7}$.

32. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x = -\operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3}) + k\pi$, $y = -\frac{\pi}{12} - \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{3}) + k\pi$. *Ind.* Substituind valoarea lui y din prima ecuaţie a sistemului în a doua, se obţine ecuaţia $(2 - \sqrt{3})\operatorname{tg}^2 x + (3 - \sqrt{3})\operatorname{tg} x - 3 = 0$.

33. $x = \frac{a}{2} + (-1)^k \arcsin\frac{b}{\sin a} + k\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{a}{2} + (-1)^{k+1}\arcsin\frac{b}{\sin a} - k\frac{\pi}{2}$, dacă $\sin a \neq 0$ şi $\left|\frac{b}{\sin a}\right| \leqslant 1$; dacă $\sin a = b = 0$, sistemul se reduce la ecuaţia $x + y = k\pi$; dacă $\sin a = 0$ şi $b \neq 0$, sistemul este incompatibil.

34. $x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$, $y = -\frac{\alpha}{2} + k\pi$, dacă $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\alpha}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, $y = -\frac{\alpha}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$, dacă $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$. Dacă $|\cos\alpha| \neq \frac{1}{2}$, sistemul este incompatibil. *Ind.* Se scrie a doua ecuaţie sub forma $4\cos\alpha\cos(x + y) = 1 + 4\cos^2\alpha$ şi se ţine seama de inegalităţile $|4\cos\alpha\cos(x + y)| \leqslant 4|\cos\alpha| \leqslant 1 + 4\cos^2\alpha$.

35. $\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - A^2}{1 - B^2}}$, $\sin\beta = \pm\frac{1}{A}\sqrt{\frac{A^2 - B^2}{1 - B^2}}$, dacă $A^2(1 - B^2) \neq 0$; $\cos\alpha = \pm 1$, $\sin\beta$ — nedeterminat, dacă $A = 0$. Dacă $B^2 = 1$, problema îşi pierde sensul. *Ind.* Ţinînd seama de prima relaţie, a doua se poate scrie sub forma $\sin\beta\,(A\cos\beta - B\cos\alpha) = 0$.

36. $0 < a^2 + b^2 \leqslant 1$, $c = \frac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}$; $a = b = 0$, $c \geqslant 0$. *Ind.* Sistemul dat admite cel puţin o soluţie atunci şi numai atunci cînd sistemul $\cos(x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1$, $(a^2 + b^2)\cos(x + y) = b^2 - a^2$, $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c$ admite cel puţin o soluţie.

37. $x = \frac{1}{2}[\pm\arccos(b - a) \pm \arccos(b + a)] + (k + l)\pi$, $y = \frac{1}{2}[\pm\arccos(b - a) \mp \arccos(b + a)] + (k - l)\pi$, dacă $-1 \leqslant a \leqslant 0$ şi $-a - 1 \leqslant b \leqslant a + 1$, sau $0 \leqslant a \leqslant 1$ şi $a - 1 \leqslant b \leqslant -a + 1$. *Ind.* Sistemul dat este echivalent cu sistemul $\cos(x + y) = b - a$, $\cos(x - y) = b + a$.

38. $x = \pm\arccos\frac{m^2}{4 - m^2} + k2\pi$, $y = \pm\arccos\frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + l2\pi$ (semnele corespund) şi $x = k2\pi$, $y = (2l + 1)\pi$, dacă $m \in [0, \sqrt{2}]$; $x = \pm\arccos\frac{m^2}{4 - m^2} + k2\pi$, $y = \mp\arccos\frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + l2\pi$ (semnele corespund) şi $x = k2\pi$, $y = (2l + 1)\pi$, dacă $m \in [-\sqrt{2}, 0)$; $x = k2\pi$, $y = (2l + 1)\pi$, dacă $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$. *Ind.* Ţinînd seama de identitate $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se obţine ecuaţia $(m^2 - 4)\cos^2 x + 4\cos x - m^2 = 0$.

39. $x = \alpha + (k + 2l)\pi$, $y = (k - 2l)\pi$; $x = (k + 2l)\pi$, $y = \alpha + (k - 2l)\pi$ dacă $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ şi k este număr par; $x = \alpha + (k + 2l + 1)\pi$, $y = (k - 2l - 1)\pi$; $x = (k + 2l - 1)\pi$, $y = \alpha + (k - 2l + 1)\pi$ dacă $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ şi k este număr impar; dacă $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$, sistemul este echivalent cu ecuaţia $x - y = (2k + 1)\pi$. *Ind.* Se scrie sistemul sub forma echivalentă $\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

40. $m^3 - 3m + 2n = 0$. *Ind.* Adăugînd la ecuaţiile sistemului identitatea $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\sin x$ şi $\cos x$ pot fi considerate rădăcinile ecuaţiei $t^2 + pt + q = 0$, cu condiţia ca $m = -\frac{p}{2}$, $1 = p^2 - 2q$, $n = -p^3 + 3pq$.

41. $(2y^2 + x - 2)^2 + x^2(4x - 5) = 0$. *Ind.* Se elimină unghiul a din ecuaţiile sistemului echivalent $4\cos^2 a - 2y \cos a - (x + 1) = 0$, $4 \cos^2 3a - 2y \cos 3a - (x + 1) = 0$.

42. $(a^2 + b^2) \cos \alpha = 2b$.

43. $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$, $y_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$; $x_3 = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$, $y_3 = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$. *Ind.* Din prima ecuaţie rezultă că $x \in [-1, 0]$ şi $y \in [0, 1]$. În aceste condiţii, sistemul considerat este echivalent cu următorul: $\sqrt{1 - y^2} = -x$, $x + y = \frac{2k}{3}$ $(k = 0, \pm 1)$.

44. a) $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$; b) $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi\right]$; c) $x \in \left(\operatorname{arctg} 2 + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; d) $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$; e) $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$.

45. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$. *Ind.* Se rezolvă inecuaţia echivalentă $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

46. $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. *Ind.* Funcţiile din ambii membri ai inegalităţii admit perioada π.

47. a) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(5\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi\right)$. *Ind.* Se scrie inecuaţia sub forma echivalentă $\sin x \cos 3x < 0$ şi se ţine seama că funcţia $\sin x \cdot \cos 3x$ admite perioada π; b) $x \in \left(k3\pi, \frac{\pi}{2} + k3\pi\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2} + k3\pi, 5\frac{\pi}{2} + k3\pi\right)$. *Ind.* Se rezolvă inecuaţia echivalentă $\frac{\sin \frac{2x}{3}}{\cos x \cos \frac{x}{3}} > 0$ în intervalul $[0, 3\pi]$, de lungime egală cu perioada funcţiei din membrul stîng al inegalităţii.

48. $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(5\frac{\pi}{3} + k2\pi, 7\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$. *Ind.* Se determină soluţiile inecuaţiei echivalente $\cos x (2 \cos x - 1)(2\cos^2 x - 1) < 0$, aparţinînd intervalului $[0, 2\pi]$.

49. $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)$. *Ind.* Inecuaţia dată este echivalentă cu inecuaţia $\cos 4x > \frac{1}{2}$.

50. $x \in \left(k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right)$. *Ind.* Se rezolvă inecuaţia echivalentă $\frac{1 - \sin x}{\sin x} > 0$.

51. $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi\right)$. *Ind.* Dacă $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, inecuaţia dată este echivalentă cu sistemele $(\mathrm{tg}\,\varphi - \sqrt{3})\ (\mathrm{tg}^2\varphi + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi + 4) > 0, \cos\varphi > 0$ şi $(\mathrm{tg}\,\varphi - \sqrt{3})\ (\mathrm{tg}^2\varphi + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\varphi + 4) < 0, \cos\varphi < 0$.

52. $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. *Ind.* Se rezolvă inecuaţia echivalentă $\frac{\mathrm{tg}^3 x + 1}{\mathrm{tg}^2 x(1 - \mathrm{tg} x)} > 0$.

53. $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi\right] \cup \left(3\frac{\pi}{4} + k2\pi, 5\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$. *Ind.* Fiindcă $\sin x - \cos x \leqslant \sqrt{2}$, în ipoteza că $x \neq 3\frac{\pi}{4} + k2\pi$, se obţine inecuaţia echivalentă $|\cos x| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

54. a) $x \in (-1, \sin 1)$; b) $x \in [-1, 1)$; c) nu are soluţii; d) $x \in R$; e) $x \in (-\infty, 0)$.

55. $x \in [-1, 0)$. *Ind.* Inecuaţia este echivalentă cu sistemul $x < x^2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

56. $x = 0$.

57. $x \in [-1, \sin 1)$. *Ind.* Inecuaţia este echivalentă cu sistemul $t^2 - 3t + 2 > 0$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, unde $t = \arcsin x$.

Capitolul 5

1. a) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; b) $2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; c) $4\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$; d) $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

2. a) $\rho = \sqrt{2 + 2\sin^2\alpha}$, $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{1 + \sin\alpha}{1 - \sin\alpha}$; b) $\rho = \sqrt{2 + 2\cos^2\alpha}$, $= \mathrm{arctg}\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$; c) $\rho = 2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$, $\varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$.

3. a) $\rho = 4\sqrt{2(1 + \sin^2\alpha)}$, $\varphi = 30° + \mathrm{arctg}\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$; b) i.

4. $\rho_1 = 2^{12}$, $\varphi_1 = \pi$; $\rho_2 = (2 + 2\cos^2\alpha)^5$, $\varphi_2 = 10\,\mathrm{arctg}\frac{\cos\alpha + 1}{\cos\alpha - 1} + \pi$.

$\rho_3 = 1$, $\varphi_3 = \frac{4\pi}{3}$; $\rho_4 = 1$, $\varphi_4 = -2n\alpha$; $\rho_5 = 2$, $\varphi_5 = n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$.

5. $2\cos n\alpha$.

7. a) $\sqrt[10]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{5}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{4}}{5}\right)$, $(k=0,1,\ldots,4)$;

b) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{6}}{3}\right)$, $k=0,1,2$; c) $\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}+$

$+\ i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{4}$, $k=0,1,2,3$; d) $\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{3}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{5\pi}{3}}{3}\right)$.

9. $\sin\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\frac{\sin\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ pentru n par, $\cos\left(\alpha+\frac{n-1}{2}\beta\right)\frac{\cos\frac{n\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$ pentru n impar.

10. $2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\cos\frac{n+2}{2}\alpha$.

12. a) $\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}$, $k=0,1,2$; b) $\sqrt[4]{2}[\cos(90°k+60°)+i\sin(90°k+60°)]$, $k=0,1,2,3$; c) $\sqrt[4]{2}[\cos(90°k+57°30')+i\sin(90°k+57°30')]$, $k=0,1,2,3$.

13. a) $i\ \mathrm{ctg}\frac{k\pi}{n}$ $k=1,2,\ldots,n-1$; b) $\mathrm{ctg}\frac{k\pi}{n}$, $k=1,2,\ldots,n-1$.

15. a) $\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}$, $2\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\right)$,

$k=0,1,2$; b) $2\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$, $3\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$ $k=0,1,2,3$.

16. $S_1=2^{\frac{n}{2}}\cdot\cos\frac{n\pi}{4}$, $S_2=2^{\frac{n}{2}}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}$.

18. $Z_3'=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $Z_3''=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1-\sqrt{3}}{2}$.

Capitolul 6

2. a) $b=40{,}62$, $c=40{,}75$; b) $b=105{,}7$, $c=124{,}34$; c) $a=73{,}58$, $c=53{,}11$; d) $a=68{,}32$, $c=61{,}62$; e) $B=35°8'$, $c=8{,}174$; f) $c=72{,}22$, $B=65°46'26''$ g) $a=420{,}1$, $B=81°30'$; h) $B=37°53'16''$, $a=229{,}6$.

3. a) $a=178{,}554$, $b=130$, $c=122{,}4$, $B=46°43'29''$; b) $b=180$, $c=135{,}6$, $B=53°7'49''$; d) $c=3889{,}4$, $c=2753{,}2$, $B=54°42'20''$.

5. $B=75°$.

11. a) $b=54{,}46$, $c=62{,}94$; b) $b=449$, $c=496{,}2$; c) $a=3{,}682$, $c=10{,}15$; d) $a=13{,}30$, $b=5{,}334$; e) $c=531{,}9$, $A=68°22$; f) $c=458{,}5$, $B=43°13'$; g) $c=31{,}01$, $B=114°23'$; h) $a=$ $=62{,}17$, $B=21°56'$.

12. a) $c = 27{,}62$, $B = 49°59'$; b) două soluţii: $c = 20{,}07$, $B = 75°$ şi $c = 6{,}24$, $B = 105°$; c) imposibil; d) două soluţii: $c = 65$, $B = 137°41'$ şi $c = 115{,}3$, $B = 42°19'$; e) $A = 49°26'$, $B = 99°22'$; f) $A = 48°22'$, $B = 58°22'$; g) $A = 16°26'$, $B = 30°24'$; h) $A = 68°4'$, $B = 64°24'$.

32. $h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

33. $S = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - (n-2)\frac{2}{\pi}}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2}$.

34. $\frac{AC}{BC}$; punctul D este proiecţia lui C pe AB.

35. 38°10′15″.

36. 58°31′4″.

37. $2AC = \sqrt{l^2 - h^2 + \frac{12a^3}{h} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{l^2 - h^2 - \frac{12a^3}{h} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$.

38. $S = \pi a^2(1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi)$.

Capitolul 7

1. Vezi aplicaţia nr. 1; se găseşte 44,064 m
2. 32,23 m.
3. 34°35′53″.
4. 21°48′06″.
5. Vezi aplicaţia nr. 2; se găseşte 97,52 m.
6. 63,90 m.
7. 64,52 m.
8. Vezi aplicaţia nr. 3; se găseşte 90,16 m.
9. Vezi aplicaţia nr. 4; se găseşte 1 120,13 m.
10. Vezi aplicaţia nr. 5; se găseşte 4590 m.
11. 1462,204 m.
12. Calculăm unghiurile A şi B cu formulele $\frac{A+B}{2} = 90° - \frac{C}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ şi apoi $AB = 2590{,}50$ m.
13. $AB = 146{,}66$ m.
14. $AB = 2{,}5$ km.
15. Vezi aplicaţia nr. 6; se găseşte $AB = 787{,}85$ m.
16. $AB = 872{,}70$ m.
17. $AB = 71{,}95$ m.
18. $d = 5716{,}25$ m.
19. Vezi aplicaţia nr. 7; se găseşte $MN = 71{,}96$ m.
20. Vezi aplicaţia nr. 8; se obţine $R = 6514{,}715$ km.
21. Vezi aplicaţia nr. 10; se obţine $AB = 4{,}44$ m.
22. Notăm $x = AC - 1{,}621$ şi $\varphi = \widehat{APD}$, D fiind piciorul perpendicularei duse din P pe AB. Avem $x = PD \operatorname{tg} \varphi$ şi $x + AB = PD \operatorname{tg} (\varphi + 4°27'54'')$. Se elimină $\operatorname{tg} \varphi$ din cele două relaţii şi se obţine $AC = x + 1{,}621 = 41{,}45$ m.
23. Vezi aplicaţia nr. 12; găsim 8 m şi 18 m.
24. Vezi aplicaţia nr. 14; se obţine: $MA = 341{,}38$ m, $MB = 285{,}53$ m, $MC = 341{,}94$ m.

25. Notăm cu A, B cele două puncte, iar cu C şi D cele două poziţii ale observatorului (C fiind vîrful unghiului α). Observăm că C este punctul de tangenţă al cercului dus prin A, B şi tangent dreptei CD. Notăm $AB = x$. Avem $a^2 = DA \cdot DB$. Din triunghiul ADC obţinem:

$$DA = \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}\ ; \text{ rezultă } a^2 = \left(x + \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \right) \cdot \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$ ş.a.m.d. Obţinem $x =$

$$= \frac{2a \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

CUPRINS

Nr. Colilor de tipar : 12



Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII“
București — R.S.R.
Comanda 226/1848

Bibliografie

I o n e s c u, I., **Ţ i ţ e i c a** G., **I o a c h i m e s c u**, **A. G.**, **C r i s t e s c u**, V. *Culegere de probleme de aritmetică, algebră şi trigonometrie*. 1901.

G h e r m ă n e s c u, **M.**, **A n g e l e s c u**, **Tr.**, **Ş a g e r**, **I.** *Probleme de matematici pentru examenele de admitere în institutele superioare*. 1958.

C r i s t e s c u, V. *Culegere de probleme de trigonometrie*. 1938.

P r e d o i e s c u, I. M., **G h i l i c e a n u**, **M.** *Probleme de trigonometrie pentru examenele de admitere în învăţămîntul superior*. Vol. I şi II. 1958.

A b r a m e s c u, H., **L u p a n**, V. *Lecţiuni de trigonometrie*. 1927.

H a r e t, C. **S p i r u**, **T u t u c**, I. *Lecţiuni de trigonometrie*. 1929.

C o s t i n, V. *Curs de trigonometrie*. 1927.

F o c ş a. D., **S t a m a t e s c u**, I. *Curs de trigonometrie*. 1935.

M a r i n e s c u, **P.**, **C o n s t a n t i n e s c u**, **G. V.** *Trigonometria*. 1946.

F. J. *Éléments de trigonométrie rectiligne*. 1898.

F. G. M. *Exercices de trigonométrie*.

G r è v y, **A.** *Trigonométrie*. 1912.

N o v o s e l o v, S. I. *Curs special de trigonometrie* (trad. din lb. rusă) Editura tehnică, Bucureşti, 1956.

K o j e u r o v, P. *Trigonometria*. Fizmatghiz, Moscova — 1962.

K a l i n i n, R. A. *Algebra i elementarnie funkţii*. 1964.

L i d s k i i, V. B., ...*Zadaci po elementarnoi matematike*. 1965.

Editura didactică şi pedagogică, 1958. *Culegere de probleme de trigonometrie*. (trad. din lb. rusă)

„Gazeta matematică“, seria B.